

Л. И. Звавич, Н. В. Дьяконова

Дидактические материалы по алгебре

К учебнику Ю. Н. Макарычева и др.
«Алгебра. 9 класс»

9

класс



Л. И. Звавич, Н. В. Дьяконова

Дидактические материалы по алгебре

К учебнику Ю. Н. Макарычева и др.
«Алгебра. 9 класс»
(М. : Просвещение)

9 класс

*Рекомендовано
Российской Академией Образования*

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2014

УДК 372.8:512

ББК 74.262.21

3-42

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Изображение учебного издания «Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. — М.: Просвещение» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Звавич Л. И.

3-42 Дидактические материалы по алгебре: 9 класс: к учебнику Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра. 9 класс» / Л. И. Звавич, Н. В. Дьяконова. — М.: Издательство «Экзамен», 2014. — 238, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-0-08045-9

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Пособие содержит самостоятельные работы, тесты, контрольные работы и другие материалы к учебнику «Алгебра. 9 класс» (авторы учебника — Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Суворова С. Б.). Предлагаемые материалы также можно использовать при изучении алгебры по любым другим учебникам.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:512

ББК 74.262.21

Подписано в печать 09.04.2014. Формат 60х90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 5,03. Усл. печ. л. 15,0
Тираж 10 000 экз. Заказ № 0131/14.

ISBN 978-5-377-08045-9

© Звавич Л. И., Дьяконова Н. В., 2014
© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2014

СТРАНИЧКА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ.....	8
----------------------------	---

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1	9
-----------------	---

С-1. Функции. Значения функций. График функции.....	9
С-2. Область определения и область значений функции	12
С-3. Область значений функции	15
С-4. Возрастание и убывание функций	18
С-5. Квадратный трёхчлен.....	22
С-6. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	24
С-7. Функция ax^2 , её свойства и график	26
С-8. Преобразование графиков функций	28
С-9. Преобразование графиков функции $y = ax^2$	30
С-10. Квадратичная функция и её график	31
С-11. Работа с графиком функции.....	33
С-12. График квадратичной функции.....	34
С-13. Степенная функция $f(x) = x^n$, n — натуральное число	36
С-14. Корень n -й степени	38
С-15. Дробно-линейная функция. Преобразование графиков функции	40
С-16. Степень с рациональным показателем	43
С-17. Целое уравнение и его корни.....	46
С-18. Дробные рациональные уравнения	48

С-19. Решение неравенств второй степени с одной переменной	51
С-20. Задания с неравенствами второй степени	54
С-21. Метод интервалов (1)	56
С-22. Метод интервалов (2)	59
С-23. Уравнение с двумя переменными и его график (1).....	62
С-24. Уравнение с двумя переменными и его график (2).....	65
С-25. Уравнение с двумя переменными и его график (3)*	67
С-26. Графический способ решения и исследования систем уравнений.....	69
С-27. Решение систем уравнений второй степени	72
С-28. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	74
С-29. Неравенства с двумя неизвестными.....	76
С-30. Системы неравенств с двумя неизвестными.....	78
С-31. Последовательности	82
С-32. Арифметическая прогрессия.....	85
С-33. Сумма арифметической прогрессии	87
С-34. Геометрическая прогрессия	89
С-35. Сумма геометрической прогрессии.....	91
С-36. Арифметическая и геометрическая прогрессии	94
С-37. Примеры комбинаторных задач. Перестановки	96
С-38. Размещения и сочетания	98
С-39. Начальные сведения по теории вероятностей	100

ВАРИАНТ 2	103
С-1. Функции. Значения функций. График функции.....	103
С-2. Область определения и область значений функции.....	105
С-3. Область значений функции	108
С-4. Возрастание и убывание функций	111
С-5. Квадратный трёхчлен.....	115
С-6. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	117
С-7. Функция $y = ax^2$, её свойства и график	119
С-8. Преобразование графиков функций.....	121
С-9. Преобразование графиков функции $y = ax^2$	123
С-10. Квадратичная функция и её график	124
С-11. Работа с графиком функции.....	126
С-12. График квадратичной функции.....	127
С-13. Степенная функция $f(x) = x^n$, n — натуральное число.	129
С-14. Корень n-й степени	131
С-15. Дробно-линейная функция. Преобразование графиков функции	133
С-16. Степень с рациональным показателем	136
С-17. Целое уравнение и его корни.....	139
С-18. Дробные рациональные уравнения	141
С-19. Решение неравенств второй степени с одной переменной	144
С-20. Задания с неравенствами второй степени	147
С-21. Метод интервалов (1)	149
С-22. Метод интервалов (2)	152

С-23. Уравнение с двумя переменными и его график (1).....	155
С-24. Уравнение с двумя переменными и его график (2).....	158
С-25. Уравнение с двумя переменными и его график (3)*	160
С-26. Графический способ решения и исследования систем уравнений.....	162
С-27. Решение систем уравнений второй степени	165
С-28. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	167
С-29. Неравенства с двумя неизвестными.....	169
С-30. Системы неравенств с двумя неизвестными.....	171
С-31. Последовательности	175
С-32. Арифметическая прогрессия.....	178
С-33. Сумма арифметической прогрессии	180
С-34. Геометрическая прогрессия	182
С-35. Сумма геометрической прогрессии.....	184
С-36. Арифметическая и геометрическая прогрессии	187
С-37. Примеры комбинаторных задач. Перестановки	189
С-38. Размещения и сочетания	191
С-39. Начальные сведения по теории вероятностей	193

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1. Квадратный трехчлен	196
К-2. Основные свойства квадратичной функции	198

К-3. Корни n -й степени. Степень с рациональным показателем.....	201
К-4. Квадратные неравенства и системы неравенств	204
К-5. Метод интервалов	207
К-6. Системы уравнений	210
К-7. Арифметическая прогрессия	212
К-8. Геометрическая прогрессия	215
К-9. Итоговая контрольная работа.....	217

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дополнительные задачи по теме «Арифметическая прогрессия»	220
Упражнения с параметрами.....	222

ОТВЕТЫ

Ответы к контрольным работам.....	226
Итоговая контрольная работа	237

Данное пособие состоит из трёх частей. В первой части содержатся тексты самостоятельных работ по всем основным программным вопросам. Во второй части предлагаются контрольные работы. Упражнения третьей части предназначены для повышения уровня развития учащихся. Они могут использоваться как на уроках, так и во внеурочной деятельности учащихся (например, на занятиях математического кружка).

Самостоятельные работы представлены двумя наборами (Вариант 1 и Вариант 2), которые легко разделить и раздать ученикам.

Контрольные работы даются в трёх вариантах, первый из которых — подготовительный. Итоговая контрольная работа представлена в четырёх вариантах двух уровней: варианты 1 и 2 — стандартного уровня трудности, отвечающие обязательным требованиям к математической подготовке учащихся; варианты 3 и 4 требуют от ученика более глубокого владения учебным материалом. Выбор вариантов работ учитель осуществляет по своему усмотрению, учитывая познавательные возможности и особенности своего класса, а также общий уровень математической подготовки учащихся класса. При этом необходимо ставить всех учащихся в равные условия, т.е. предлагать всему классу либо варианты 1 и 2, либо 3 и 4.

На выполнение самостоятельной работы рекомендуется выделять не более 15 минут урока, на контрольную работу — 30–40 минут. Оценивание работ отметкой производится в соответствии с существующими нормами оценки.

5. При каком значении параметра a график функции $y = -3x + a$:

- а) проходит через точку $M(-1; 5)$;
- б) проходит ниже точки $M(-1; 5)$;
- в) проходит выше точки $M(-1; 5)$;
- г) не проходит через точку $M(-1; 5)$?

6. Автомобиль движется по шоссе со скоростью 50 км/ч от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 200 км. Задайте функцию $S(t)$ (км) для $0 \leq t \leq 4$ (ч):

- а) расстояния от автомобиля до пункта А;
- б) расстояния от автомобиля до пункта Б;
- в) расстояния от автомобиля до пункта С, находящегося на одинаковом расстоянии от пунктов А и Б.

7. Без построения графика функции $y = 3x^2 - x - 1$ найдите все точки этого графика:

- а) с абсциссой 7;
- б) с ординатой -1 ;
- в) с равными координатами;
- г) сумма координат которых равна нулю.

8*. При каких значениях параметра b на графике функции $y = x^2 - 4x + b$:

- а) ровно одна точка с ординатой 6;
- б) ровно две точки с ординатой 6;
- в) нет точек с ординатой 6?

9. Дана функция $f(x) = \frac{(x-7)(x+1)}{x(x-2)^2}$. Во втором столбце

таблицы укажите знак значения функции в точке x : «+», если оно положительно, и «-», если отрицательно.

x	- 2	- 0,7	1,8	6,3	112
Знак $f(x)$					

10*. Функция $y = [x]$ определяет наибольшее целое число, не превосходящее числа x . Решите уравнение:

а) $[x] = 3$;

в) $[2x] = 3$.

б) $[x+1] = 3$;

С-2. Область определения и область значений функции

1. Сопоставьте данные функции с их областью определения:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

3) $P(t) = \frac{t}{\sqrt{t-1}}$;

2) $g(x) = x\sqrt{x-1}$;

4) $y = \frac{t^2 - 1}{t + 1}$.

а) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

г) $(-1; +\infty)$;

б) $\mathbb{R}$;

д) $[-1; +\infty)$;

в) $[1; +\infty)$;

е) $(1; +\infty)$.

Функция	1)	2)	3)	4)
Область определения				

2. Какие из данных функций определены на всем множестве действительных чисел?

а) $y = 5x + 1$;

г) $y = x + \frac{1}{x^2 - 5}$;

б) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

д) $y = (\sqrt{1-x})^2$;

в) $y = x + \frac{1}{x^2 + 5}$;

е) $y = \sqrt{(1-x)^2}$.

3. Из данных высказываний выберите верные:

а) функция $y = \sqrt{1-x}$ определена для всех x из промежутка $(-3; 5]$;

б) областью определения функции $y = \sqrt{1-x}$ является множество $(-\infty; +1]$;

в) функция $y = \sqrt{1-x}$ определена для всех x из промежутка $(-3; -2]$;

г) областью определения функции $y = \sqrt{1-x}$ является множество $(-\infty; 1)$.

4. Найдите область определения функций:

$$1) f(x) = \frac{x-2}{x^2+4};$$

$$3) P(t) = \frac{t^3-11}{\sqrt{t+51}};$$

$$2) g(x) = (x-1)\sqrt{x+1};$$

$$4) y = \frac{t^2-4}{t-2}.$$

5. Для каждой из данных функций (1-6) определите вид числового множества (а-е), которое является областью её определения:

$$1) y = \frac{2+t}{\sqrt{t-3}};$$

а) вся числовая прямая;

$$2) y = \frac{2+t}{1+\sqrt{t-3}};$$

б) числовой отрезок;

$$3) y = \frac{2+t}{(t+3)^2+11};$$

в) интервал;

$$4) y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x};$$

г) полуинтервал;

$$5) y = \frac{2+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-3}};$$

д) числовой луч;

$$6) y = \frac{2}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x}{\sqrt{5-x}}.$$

е) открытый числовой луч.

Функция	1)	2)	3)	4)	5)	6)
Вид области определения						

6*. Для функции $y = (x-3)(x+2) \cdot \sqrt{x}$ найдите:

а) область определения;

б) нули функции (те значения переменной, при которых значение функции равно нулю).

7*. Постройте графики функций:

а) $y = x - 2$;

в) $y = (\sqrt{x-2})^2$;

б) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$;

г) $y = (\sqrt{4-x})^2 + 2(\sqrt{x-3})^2$.

8*. При каких значениях параметра a областью определения функции является множество действительных чисел?

а) $y = ax - 1$;

в) $y = \frac{3x-1}{3x+a}$;

б) $y = x + \frac{1}{x^2 + a}$;

г) $y = \frac{3x-1}{ax-3}$.

9*. При каких значениях параметра b областью определения функции является числовой луч?

а) $y = 2x - b$;

в) $y = \frac{\sqrt{2x-b}}{x-3}$.

б) $y = \sqrt{2x-b}$;

10*. При каких значениях параметра b уравнение

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{2 + \sqrt{b-x}} = 0 \text{ имеет ровно один корень?}$$

С-3. Область значений функции

1. Сопоставьте каждую из функций с областью её значений:

а) $y = 3x - 1$;

г) $y = |x|$;

б) $y = x^2 + 5$;

д) $g(t) = \sqrt{x}$.

в) $f(x) = \frac{1}{x}$;

1) $[0; +\infty)$;

3) $(-\infty; +\infty)$;

2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

4) $[5; +\infty)$.

Функция	а	б	в	г	д
Область значений функции					

2. Для каждой из данных функций найдите её область значений:

а) $y = |x| + 3$;

в) $y = 3 - |x|$.

б) $y = |x| - 5$;

3. Для каждой пары функций, приведённой в таблице, установите, совпадают их области определения или не совпадают. В случае совпадения пишите «да», в случае несовпадения «нет».

$$f_1(x) = 3x - 5; f_2(x) = \frac{3x-5}{x^2+7}; f_3(x) = \frac{3x-5}{x^2-9}; f_4(x) = \sqrt{3x-5};$$

$$f_5(x) = \frac{\sqrt{3x-5}}{x+7}; f_6(x) = \frac{\sqrt{3x-5}}{x-7}; f_7(x) = \frac{\sqrt{3x-5}}{x^2-49}.$$

Функция	$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$	$f_4(x)$	$f_6(x)$
Функция	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$
Да или нет						

4. Найдите область значений функции:

а) $y = 3x - 2$ при $-2 \leq x \leq 5$;

б) $y = 3 - 2x$ при $-2 \leq x \leq 5$.

5. Представьте себе график функции $y = x^2$ и, используя свой воображаемый график, найдите область значений функции $y = x^2$ при:

а) $1 \leq x \leq 3$;

в) $-1 \leq x \leq 3$;

б) $-3 \leq x \leq -1$;

г) $-3 \leq x \leq 3$.

6*. Найдите множество значений функции

$y = |x - 3| + |x + 2|$ при $-2 \leq x \leq 3$.

7. Укажите, какие из данных высказываний являются верными:

а) все значения независимой переменной образуют область значений функции;

б) все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции;

в) корнем квадратным из неотрицательного числа a называется любое число b , такое, что $b^2 = a$;

г) уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, если $f(x) = 0$;

д) квадратное уравнение имеет ровно один корень, если его дискриминант равен 0;

е) областью определения функции $y = x^2$ является множество всех чисел;

ж) областью значений функции $y = x^2$ является множество всех чисел;

з) если две стороны треугольника имеют длины 3 и 5, то областью значений длины третьей стороны этого треугольника является множество $(2; 8)$.

8. Сколько различных целых значений принимает функция $y = \frac{2x+7}{3}$ при $-2 \leq x \leq 10$?

9*. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2-3t, & \text{если } -2 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t-8, & \text{если } 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

и определите:

- а) область значений функции;
- б) все такие значения t , для которых значение функции равно 5;
- в) все такие значения t , для которых значение функции равно - 5;
- г) все такие целые значения функции, которые она принимает более одного раза.

10*. Выполните пункты а) и б):

- а) При каких значениях параметра b уравнение $3x - 1 = b$ имеет хотя бы один корень на множестве $(-1; 3]$?
- б) Найдите область значений функции $y = 3x - 1$ при $-1 < x \leq 3$.

Сравните ответы пунктов а) и б) и попробуйте сделать вывод о способе нахождения области значений функции на данном множестве.

С-4. Возрастание и убывание функций

1. Какие из данных функций возрастают на всей области определения, а какие убывают на всей области определения?

а) $y = 3x - 11$;

е) $y = -\frac{2}{x}$;

б) $y = -5x + 5$;

ж) $y = 5$;

в) $y = x^2$;

з) $y = -x^3$;

г) $y = \sqrt{x}$;

и) $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$.

д) $y = \frac{4}{x}$;

Убывают на всей области определения	
Возрастают на всей области определения	
Не являются возрастающими (убывающими) на всей области определения	

2. Какие из приведенных функций возрастают в промежутке $[0; 3]$?

а) $y = -6x + 11$;

е) $y = -\frac{24}{x}$;

б) $y = 15x - 5$;

ж) $y = -7$;

в) $y = x^2$;

з) $y = -x^3$;

г) $y = \sqrt{x}$;

и) $y = |-x|$.

д) $y = \frac{3}{x}$;

3. Какие из приведенных функций убывают в промежутке $(0; 3)$?

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| а) $y = -6x + 11$; | е) $y = -\frac{24}{x}$; |
| б) $y = 15x - 5$; | ж) $y = -7$; |
| в) $y = x^2$; | з) $y = -x^3$; |
| г) $y = \sqrt{x}$; | и) $y = -x $. |
| д) $y = \frac{3}{x}$; | |

4. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой оси. Расположите в порядке возрастания числа:

$$f(-3); f(-5); f(17); f(0); f(10\sqrt{3}).$$

5*. При каких значениях параметра k :

- а) функция $y = kx + 3$ является убывающей?
- б) функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает в промежутке $(0; +\infty)$?
- в) для функции $y = \frac{k}{x}$ $y(-3) > y(-2)$?
- г) функция $y = x^2$ возрастает в промежутке $[k; 3]$?

6*. Функция $y = f(x)$ возрастает в промежутке $[-3; 35]$. Укажите, какие из данных утверждений являются верными:

- а) $f(7) < f(34)$;
- б) $f(-1) - f(-2)$ — положительное число;
- в) $f(4) \cdot f(3)$ — положительное число;
- г) $f(35) > f(x)$ при всех x из промежутка $[-3; 35]$;
- д) если число 7 является нулем данной функции, то в промежутке $[3; 7)$ функция принимает отрицательные значения;
- е) уравнение $f(x) = f(5)$ на промежутке $[-3; 35]$ может иметь два различных корня.

7*. $f(x)$ — убывающая функция. Решите неравенство:
 $x(f(13) - f(-13)) < 0$.

8*. На промежутке $[-3; 5]$ постройте график какой-либо функции $y = f(x)$, если известно, что её график проходит через начало координат и:

- а) $f(x)$ возрастает в промежутке $[-3; 5]$;
- б) $f(x)$ убывает в промежутке $[-3; 5]$;
- в) $f(x)$ возрастает в промежутке $[-3; 0]$ и убывает в промежутке $[0; 5]$;
- г) $f(x)$ убывает в промежутке $[-3; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; 5]$.

9*. Найдите, в какой точке промежутка $[4; 10]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее на этом промежутке значение. Во втором столбце таблицы напишите либо точку промежутка $[4; 10]$, либо напишите «невозможно определить».

Условие	В какой точке y принимает наибольшее на промежутке $[4; 10]$ значение
$f(x)$ возрастает в промежутке $[4; 10]$	
$f(x)$ убывает в промежутке $[4; 10]$	
$f(x)$ возрастает в промежутке $[4; 7]$ и убывает в промежутке $[7; 10]$	
$f(x)$ убывает в промежутке $[4; 7]$ и возрастает в промежутке $[7; 10]$	

10*. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 1 < x < 4; \\ 6 - x, & \text{если } 4 \leq x \leq 7, \end{cases}$$

и определите:

- а) область определения функции;
- б) область значений функции;
- в) нули функции;
- г) при каких значениях x функция принимает положительные значения;
- д) при каких значениях x функция принимает отрицательные значения;
- е) промежутки, в которых функция возрастает и в которых она убывает;
- ж) в скольких точках графика функция принимает значение, равное 1,76.

С-5. Квадратный трёхчлен

1. Запишите данные выражения (а–д) в виде квадратных трехчленов вида $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) и заполните таблицу коэффициентов этого трехчлена.

а) $3x^2 - 5x - 1$;

г) $(x - 3)^2$;

б) $2x - x^2$;

д) $5 - (2x - 1)^2$.

в) $(x + 1)(5x - 2)$;

	а	б	в	г	д
a					
b					
c					

2. Найдите корни квадратных трехчленов:

а) $2x^2$;

г) $2x^2 - 3x$;

б) $3x^2 - 27$;

д) $-x^2 - 13x$;

в) $-x^2 + 25$;

е) $x^2 - 3x + 2$.

3. Какие из данных квадратных трехчленов не имеют корней?

а) $2x^2 + 1$;

г) $2x^2 - 5x$;

б) $3x^2 - 7$;

д) $-x^2 - 113$;

в) $-x^2 + 332$;

е) $x^2 - 3x + 11$.

4. При каких значениях m выражения тождественно равны?

а) $x^2 - 2x$ и $(x - 1)^2 + m$;

б) $x^2 + 4x + 8$ и $(x + 2)^2 + m$;

в) $x^2 - 6x + 8$ и $(x - m)^2 - 1$;

г) $-4x^2 + 4x - 3$ и $-(2x - 1)^2 + m$.

5. Выделите из квадратного трехчлена квадрат двучлена:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| а) $x^2 + 2x$; | в) $x^2 - 8x + 8$; |
| б) $x^2 + 4x + 8$; | г) $-4x^2 + 4x$. |

6. Найдите наименьшее значение выражения:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| а) $x^2 + 7$; | в) $5(x + 1)^2 - 13$; |
| б) $(x - 1)^2 - 5$; | г) $9x^2 - 6x$. |

7. Найдите наибольшее значение выражения:

- | | |
|------------------------|--------------------|
| а) $-x^2 + 37$; | в) $-5(x + 1)^2$; |
| б) $-(x - 1)^2 - 15$; | г) $-4x^2 + 8x$. |

8*. Определите, имеет ли квадратный трехчлен $ax^2 + 5x + 2$ корни, если график функции $y = ax^2 + 5x + 2$ проходит через точку:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| а) $A(-7; 0)$; | в) $C(1; 17)$; |
| б) $B(1; 8)$; | г) $P(2; -6)$. |

9*. При каких значениях параметра a наибольшее значение выражения $a(3x + 7a - 1)^2 + 5a^2 - 20$ равно нулю?

10*. Решите уравнение: $|x^2 + 8x + 22| - |x^2 + 6x + 19| = 11x$.

С-6. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители

1. Разложите на множители первой степени:

а) $x^2 - 3x$;

г) $-7x^2 + 28$;

б) $-7x^2 + 14x$;

д) $x^2 - 5$.

в) $9x^2 - 1$;

2. Укажите, какие из данных разложений квадратного трёхчлена на множители первой степени выполнены верно?

а) $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(x - 0,5)$;

б) $2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)(x - 0,5)$;

в) $2x^2 + 5x - 3 = 2(x - 3)(x + 0,5)$;

г) $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$;

д) $2x^2 + 5x - 3 = (2x + 6)(x - 0,5)$;

е) $2x^2 + 5x - 3 = 2(x^2 + 2,5x - 1,5)$;

ж) $2x^2 + 5x - 3 = x \cdot (2x + 5 - \frac{3}{x})$.

3. Какие из квадратных трёхчленов нельзя разложить на множители первой степени:

а) $x^2 - 13x - 1$;

г) $7x^2 + 28$;

б) $-7x^2 + 14x - 54$;

д) $x^2 - 6x + 9$?

в) $9x^2 + x - 1$;

4. Разложите квадратные трёхчлены на множители первой степени:

а) $x^2 + 2x - 3$;

в) $-3x^2 + 5x + 2$;

б) $2x^2 - 5x + 2$;

г) $100x^2 - 20x + 1$.

5. Сократите дроби:

а) $\frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 - 1}$;

б) $\frac{3x - x^2 + 10}{3x^2 + 6x}$.

6. Найдите наименьший общий знаменатель трёх алгебраических дробей:

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}; \frac{5x - 3}{2x - 5}; \frac{x}{2x^2 - 7x + 5}.$$

7. Разложите на множители первой степени:

а) $3t^2 + 7t + 2$;

б) $3t^2 + 7at + 2a^2$.

8*. Корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа 2 и 3. Напишите разложение этого трёхчлена на множители первой степени, если:

а) старший коэффициент трёхчлена равен $a = 5$;

б) свободный член трёхчлена равен $c = -6$;

в) второй коэффициент трёхчлена $b = 15$;

г) значение квадратного трёхчлена при $x = 1$ равно 8.

9*. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень, равный 5. Напишите разложение этого трёхчлена на линейные множители, если:

а) старший коэффициент квадратного трёхчлена $a = -2$;

б) свободный член этого квадратного трёхчлена $c = 50$.

10*. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}$ и найдите

все значения параметра m , при которых прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

6*. Прямая, параллельная оси y и проходящая через точку $A(2; 0)$, пересекает графики функций $y = x^2$; $y = -3x^2$ и $y = 0,5x^2$ в точках K ; M и P соответственно. Найдите отношение длин отрезков KP и KM .

7*. Прямая $y = 9$ пересекает график функции $y = ax^2$ в точках P и Q , а график $y = bx^2$ — в точках T и M . Пусть точка P лежит на отрезке TM . Запишите в порядке возрастания числа a ; b и 0 .

8*. На графике функции $y = 3x^2$ найдите все точки, сумма координат которых равна 4.

9*. Сколько различных целых значений принимает функция $y = \frac{1}{3}x^2$ при $-3 \leq x \leq 5$?

10*. При каких значениях параметра b наибольшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-3; b]$ равно 9?

С-8. Преобразование графиков функций

1. Дан исходный график функции $y = f(x)$ (рис. 1).

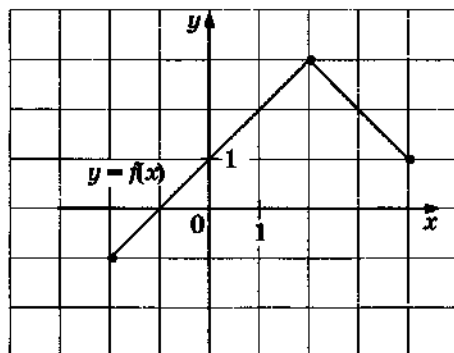


Рис. 1

Свойства функции:

область определения функции $[-2; 4]$;

область значения $[-1; 3]$;

-1 – ноль функции;

на промежутке $[-2; -1)$ $y < 0$;

на промежутке $(-1; 4]$ $y > 0$;

возрастает в промежутке $[-1; 2]$;

убывает в промежутке $[2; 4]$.

Для каждого задания (1–8) выберите нужное преобразование исходного графика (а–з), постройте график и по приведённому образцу опишите свойства функции.

а) Параллельный перенос вдоль оси y на 3 вверх.

б) Симметрия относительно оси y .

в) Симметрия относительно оси x .

г) Параллельный перенос вдоль оси x на 1 влево.

д) Параллельный перенос вдоль оси x на 4 вправо.

е) Растяжение вдоль оси y в 3 раза.

ж) Сжатие вдоль оси y в 2 раза.

з) Параллельный перенос вдоль оси y на 2 вниз.

1) Постройте график функции $y = -f(x)$.

2) Постройте график функции $y = f(x) + 3$.

3) Постройте график функции $y = f(x) - 2$.

4) Постройте график функции $y = f(x - 4)$;

5) Постройте график функции $y = f(x + 1)$.

6) Постройте график функции $y = f(-x)$.

7) Постройте график функции $y = 3f(x)$.

8) Постройте график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$.

2. Постройте график функции $y = |f(x)|$, оставив без изменения части графика $y = f(x)$, для которых $f(x) \geq 0$, а остальные отразите симметрично относительно оси x .

3. Постройте график функции $y = f(|x|)$, оставив без изменения части графика $y = f(x)$, для которых $x \geq 0$, а затем отразите эту часть симметрично оси y .

С-9. Преобразование графиков функции $y = ax^2$

1. Используя графики функции $y = ax^2$, постройте графики функций (1–6):

1) $y = x^2 - 2$;

2) $y = -2x^2 + 8$;

3) $y = 0,5(x + 1)^2$;

4) $y = -(x - 3)^2$;

5) $y = (x + 1)^2 - 4$;

6) $y = -2(x - 2)^2 + 2$.

2. Задайте квадратичную функцию, графиком которой является парабола вида $y = x^2$ с вершиной в точке $M(-3; -5)$.

3. Задайте квадратичную функцию, графиком которой является парабола вида $y = x^2$, а нулями числа -2 и 4 .

4*. Задайте квадратичную функцию, наибольшее значение которой равно 4 , абсцисса вершины параболы равна 5 , а один из нулей функции равен 3 .

5*. Постройте линию, на которой лежат вершины парабол, являющихся графиками функций $y = (x - 2a)^2 + 3a$.

C-10. Квадратичная функция и её график

1. Даны квадратичные функции:

а) $y = -4x + 7x^2 - 1$;

в) $y = 8(2x - 1)(4 - x)$;

б) $y = 9x - x^2 + 11$;

г) $y = (9 - x)(6 - 7x)$.

Сопоставьте эти функции с соответствующими утверждениями:

1) Ветви параболы направлены вверх.

2) Ветви параболы направлены вниз.

2. Какие из данных утверждений являются верными?

а) Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) равен нулю, то вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ лежит на оси x .

б) Осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) является прямая $y = -\frac{b}{a}$.

в) Если $(-4; 5)$ — вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то выражение $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x - 4)^2 + 5$.

г) Если $(-4; 5)$ — вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то выражение $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x + 4)^2 + 5$.

д) Если $(-2; -1)$ — вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ и график проходит через точку $(0; 3)$, то $a > 0$.

е) Если каждая из прямых $y = 1$ и $y = -1$ пересекает график функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то $|a| > 1$.

3. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 4x + 3$ и постройте её график. Определите:

а) наименьшее значение функции;

б) область значений функции;

в) нули функции;

г) промежутки возрастания и убывания функции.

4. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 4x + 3$, сравните:

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| а) $y(5,3)$ и $y(3,9)$; | г) $y(2,1)$ и $y(1,9)$; |
| б) $y(-5,3)$ и $y(-3,9)$; | д) $y(2,99)$ и 0. |
| в) $y(-5,3)$ и $y(3,9)$; | |

5. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 4x + 3$, решите неравенства:

- а) $x^2 - 4x + 3 < 0$;
 б) $x^2 - 4x + 3 > 0$;
 в) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$;
 г) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

6. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 4x + 3$, найдите:

- а) наибольшее значение функции на отрезке $[2 + \sqrt{3}; 4]$;
 б) наименьшее значение функции на отрезке $[2 - \sqrt{13}; -1]$;
 в) наименьшее значение функции на отрезке $[2 - \sqrt{13}; 2]$;
 г) наибольшее значение функции на отрезке $[2 - \sqrt{13}; 1]$.

7*. При каких значениях параметра c парабола $y = x^2 - 4x + c$ пересекает ось y в точке $(0; 11)$?

8*. При каких значениях параметра b парабола $y = x^2 + bx + 3$ пересекает ось x в точке $(11; 0)$?

9*. При каких значениях параметра a прямая $x = 3$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 - 4x + 3$?

10*. Дана функция: $y = -3x^2 - 8x + 35$. Найдите:

- а) наибольшее значение функции;
 б) наибольшее целое значение функции;
 в) при каком целом значении x значение функции наибольшее; найдите это значение.

С-11. Работа с графиком функции

1. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{при } x \leq 0, \\ -x^2 + 4x & \text{при } x > 0. \end{cases}$

а) Найдите значения функции в точках $-3; 0; 3; 5$.

б) Постройте график данной функции.

2. Используя график и свойства квадратичных функций из задания 1, найдите:

а) нули функции;

б) промежутки монотонности и область значений функции;

в) сколько корней имеет уравнение (результаты занесите в таблицу):

Уравнение	$f(x) = 3$	$f(x) = 4$	$f(x) = -200$	$f(x) = 300$
Количество корней				

г) число корней уравнения $f(x) = b$;

д*) при каких значениях параметра b уравнение $f(x) = b$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 4]$;

е) при каких значениях параметра b уравнение $f(x) = b$ не имеет корней на луче $(-\infty; -1]$;

ж*) число корней уравнения $f(x) = x + 2$;

з*) какие-нибудь два значения параметра b , при которых уравнение $f(x) = x + b$ имеет не менее двух корней;

и*) какие-нибудь два значения параметра k , при которых уравнение $f(x) = kx + 4$ имеет не более двух корней.

С-12. График квадратичной функции

1. Даны шесть графиков квадратичной функции (рис. 2–7) $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Для каждого случая сравните с нулем указанные в таблице числа (используйте знаки $=$; $<$; $>$).

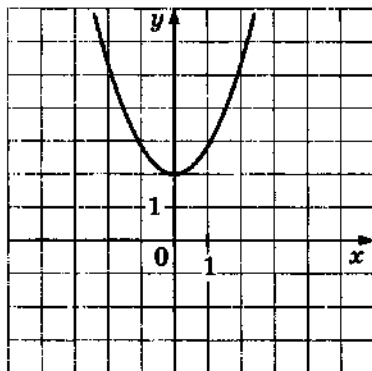


Рис. 2

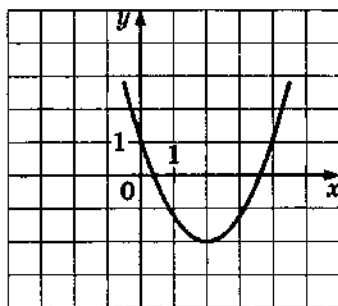


Рис. 3

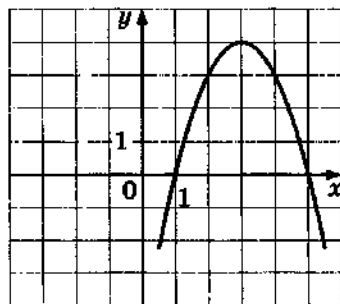


Рис. 4

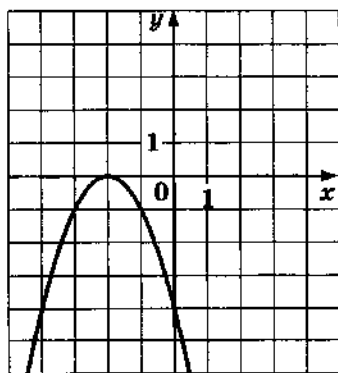


Рис. 5

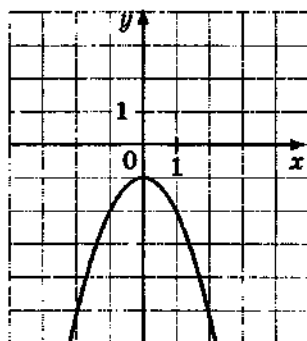


Рис. 6

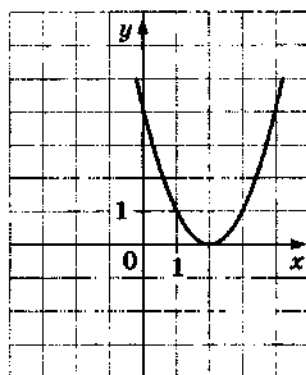


Рис. 7

	Рис. 2 (образец)	Рис. 3	Рис. 4	Рис. 5	Рис. 6	Рис. 7
a (старший коэффициент)	$a > 0$					
b (второй коэффициент)	$b = 0$					
c (свободный член)	$c > 0$					
D (дискриминант)	$d < 0$					

2. Используя «шаблон» параболы $y = x^2$, постройте на пяти рисунках графики функции $y = x^2 + px + q$ так, чтобы выполнялись условия, данные в таблице.

	Рис. А	Рис. Б	Рис. В	Рис. Г	Рис. Д
p	$p > 0$	$p > 0$	$p > 0$	$p > 0$	$p = 0$
q	$q > 0$	$q > 0$	$q > 0$	$q = 0$	$q > 0$
D	$D > 0$	$D < 0$	$D = 0$		

С-13. Степенная функция $f(x) = x^n$, n — натуральное число

1. Функция задана формулой $y = x^{24}$. Сравните:

- а) $f(3,6)$ и $f(2,8)$; в) $f(-2,7)$ и $f(2,7)$;
б) $f(-5,8)$ и $f(-8,6)$; г) $f(\sqrt{5}-3)$ и $f(\sqrt{5}-2)$.

2. Функция задана формулой $y = x^{27}$. Сравните:

- а) $f(3,6)$ и $f(2,8)$; в) $f(-2,7)$ и $f(2,7)$;
б) $f(-5,8)$ и $f(-8,6)$; г) $f(\sqrt{5}-3)$ и $f(\sqrt{5}-2)$.

3. Найдите площадь треугольника, одной из вершин которого является начало координат, а две другие являются точками пересечения графика функции $y = x^4$ и прямой $y = 81$.

4. Функция задана формулой $y = x^4$. Вычислите:

- а) $\frac{f(6) - f(2)}{f(2) - f(0)}$;
б) $(f(1,9) + f(-1,9)) \cdot (f(1 - \sqrt{5}) - f(\sqrt{5} - 1))$.

5. На графике функции $y = x^n$ взяты точки A и B с абсциссами соответственно -1 и 1 . Найдите координаты точки пересечения прямой AB с осью y , если:

- а) $n = 48$; б) $n = 17$.

6. Сколько различных целых значений принимает функция $y = x^n$ на отрезке $[-1; 2]$, если:

- а) $n = 6$; б) $n = 5$?

7. Установите соответствие между функциями (1-4) и указанными свойствами (а-е). Результаты занесите в таблицу.

- 1) $y = x^{24}$; 3) $y = x^2 - 1$;
2) $y = x^{97}$; 4) $y = 3x + 5$.

- а) Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.
- б) Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.
- в) Функция возрастает на всей области определения.
- г) Функция убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
- д) Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
- е) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

а	б	в	г	д	е

8*. Найдите угловой коэффициент прямой, пересекающей график функции $y = x^3$ в точках с абсциссами:

- а) 0 и 2; б) -2 и 1.

9*. На графиках функций $y = x^{31}$; $y = x^{12}$ и $y = 0$ взяты соответственно точки A , B и C с абсциссой x_0 .

Какая из данных точек лежит между двумя другими, если

- a) $x_0 = 3$; в) $x_0 = 0,7?$**
б) $x_0 = -1$;

10*. При каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с графиком функции $y = \frac{x^{22} - 1}{x^{11} - 1} - 1$ только одну общую точку?

7. Выберите верные утверждения:

а) $\sqrt[13]{-19} = -\sqrt[13]{19}$;

г) $\sqrt[12]{x^{12}} = |x|$;

б) $\sqrt[14]{-18} = -\sqrt[14]{18}$;

д) $\sqrt[37]{x^{37}} = |x|$.

в) $\sqrt[6]{5^6} = \pm 5$;

8. Решите уравнения:

а) $x^3 = 64$;

г) $x^8 = 11$;

б) $x^3 = -125$;

д) $x^8 = -19$.

в) $x^3 = 33$;

9*. Между какими соседними целыми числами находится число:

а) $\sqrt{159}$;

г) $\sqrt[5]{159}$;

б) $\sqrt[3]{159}$;

д) $\sqrt[100]{159}$?

в) $\sqrt[4]{159}$;

10*. Докажите, что если натуральное число n имеет ровно 19 различных делителей, то $\sqrt[18]{n}$ является натуральным числом.

С-15. Дробно-линейная функция. Преобразование графиков функции

1. Постройте график функции $y = 2 + \frac{1}{x-1}$ и найдите:

- а) асимптоты;
- б) область определения функции;
- в) область значений функции;
- г) нули функции;
- д) промежутки монотонности данной функции.

2. Найдите асимптоты функций:

а) $y = \frac{3x+2}{x}$;

б) $y = \frac{x+3}{x+2}$.

3. Задайте дробно-линейную функцию с асимптотами $x = 3$; $y = -1$, график которой получен параллельным переносом:

а) графика функции $y = \frac{2}{x}$;

б) графика функции $y = -\frac{3}{x}$;

в) графика функции $y = \frac{1}{2x}$.

4. Из данных графиков (рис. 8–11) выберите график функции

$$y = \frac{3x+1}{2x-1}.$$

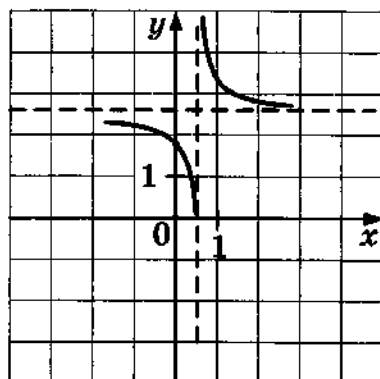


Рис. 8

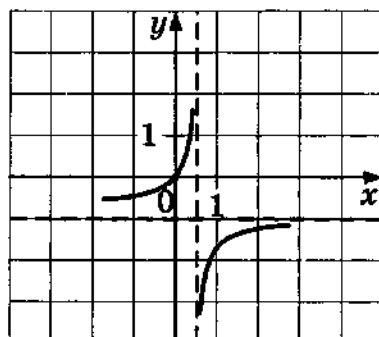


Рис. 9

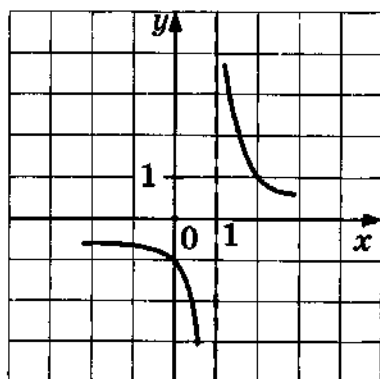


Рис. 10

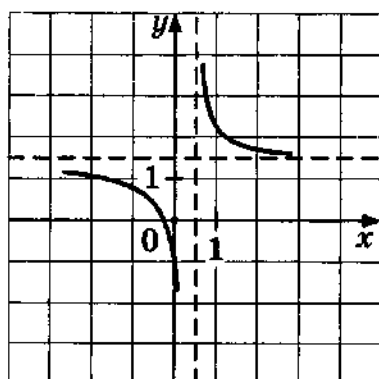


Рис. 11

5. Сколько точек пересечения имеют графики функций:

а) $y = x^2 - 4x$ и $y = \frac{1}{x}$; б) $y = x^2 - 4x$ и $y = -\frac{1}{x}$?

6. Найдите все точки графика $y = 3 - \frac{5}{x-1}$, абсцисса и ордината которых являются целыми числами.

7. При каких значениях параметра b прямая $y = b$ не имеет общих точек с графиком функции:

а) $y = 2 + \frac{1}{x-1}$; б) $y = \frac{3x+7}{5x-2}$?

8. Постройте график функции $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$ и, используя его, решите неравенства:

а) $f(x) < 0$; в) $f(x) \leq 0$
б) $f(x) > 0$; г) $f(x) \geq 0$.

9*. Найдите наименьшее значение функции

$f(x) = 3 - \frac{1}{|x|+4}$ (график строить совершенно необязательно).

10*. Найдите область определения функции $y = \frac{|x|+x+1}{x}$ и построьте её график.

С-16. Степень с рациональным показателем

1. Представьте степень с рациональным показателем в виде корня:

$7^{\frac{2}{3}}$	$(0,6)^{\frac{1}{2}}$	$-5^{\frac{4}{3}}$	$a^{\frac{1}{3}}$	$x^{-\frac{3}{5}}$	$5^{\frac{1}{3}} - 6^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{2}{5}}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{4}{9}}$

2. Представьте арифметический корень в виде степени с рациональным показателем:

$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{11}$	$\sqrt[3]{(0,5)^2}$	$(\sqrt[8]{0,3})^3$	$x \cdot \sqrt{x}$	$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$	$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$	$\sqrt[5]{c}$

3. Найдите области определения выражений:

Выражение	Область определения
$\sqrt[6]{x-5}$	
$(x-1)^{\frac{1}{8}}$	
$\sqrt[3]{x-10}$	
$(x-2)^{\frac{1}{7}}$	
$(x-4)^{-\frac{1}{3}}$	
$(4+x^2)^{\frac{28}{29}}$	
$(1-2a+a^2)^{\frac{5}{6}}$	
$(1-2a+a^2)^{-\frac{5}{6}}$	

4. Установите соответствие между графиками функций (рис. 12–15) и формулами (а–г), которые их задают.

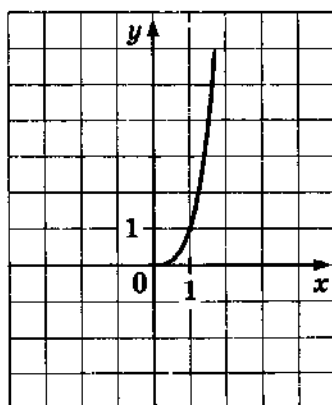


Рис. 12

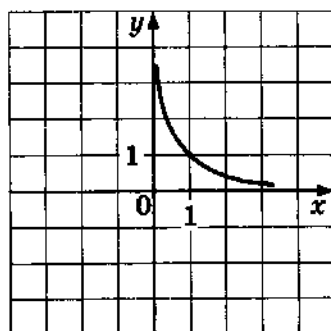


Рис. 13

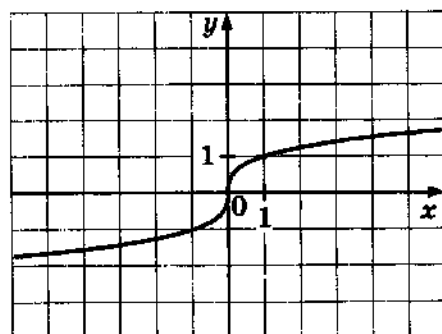


Рис. 14

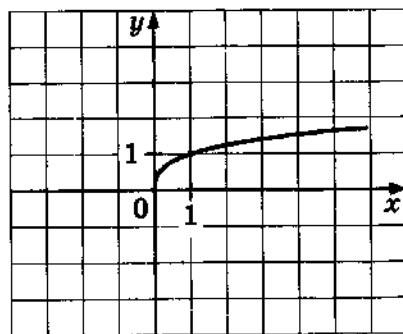


Рис. 15

а) $y = \sqrt[3]{x}$;

в) $y = x^{\frac{9}{2}}$;

б) $y = x^{\frac{1}{6}}$;

г) $y = x^{-0.1}$.

Рис. 12	Рис. 13	Рис. 14	Рис. 15

5. Постройте графики функций:

a) $y = x^{\frac{1}{5}}$;

В) $y = (-x^{\frac{1}{5}})$;

6) $y = -x^{\frac{1}{5}}$;

$$\Gamma) y = |x|^{\frac{1}{5}}.$$

6. Постройте графики функций:

a) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

В) $y = (x - 3)^{\frac{1}{2}}$;

б) $y = x^{\frac{1}{2}} + 3$;

г) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}} - 1$.

7. Вычислите:

a) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{-\frac{19}{20}}$;

B) $\frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt[20]{x^{19}}}$;

$$6) (27a)^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot (-a^{-\frac{19}{20}});$$

$$\Gamma) \left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}} \right)^{-60}.$$

8. Сократите дроби:

$$\text{a) } \frac{x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}}};$$

$$6) \frac{x^{\frac{1}{9}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y}$$

9*. Из формулы $3k^{\frac{1}{3}} + 1 - a^{-1} = 0$ выразите:

а) k через a ;

б) a через k .

10*. При каких значениях c график функции

$y = |x^{\frac{1}{2}} - 2| + |x^{\frac{1}{2}} - c|$ содержит отрезок длины 5 и не содержит никакого отрезка большей длины?

С-17. Целое уравнение и его корни

1. Определите степень каждого из уравнений и найдите все его корни. Укажите количество различных корней уравнения в таблице.

а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$;

б) $(x^3 - 5x^2 - 6x)(x^2 - 36) = 0$;

в) $(x^2 + 7x - 18)^2(x + 3) = 0$;

г) $x^{17} + x^{15} = 0$.

Уравнение	а	б	в	г
Степень				
Корни				
Количество различных корней				

2. Решите уравнения:

а) $x^5 - 7x^4 + 6x^3 + x^2 - 7x + 6 = 0$;

б) $x^6 - 7x^5 + 6x^4 - x^2 + 7x - 6 = 0$;

в) $2x^5 - 14x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 49x + 42 = 0$;

г) $x^6 - 7x^5 + 6x^4 = 5x^2 - 35x + 30$.

3. Решите уравнения:

а) $x^2 = 3$;

г) $x^3 = -3$;

б) $x^2 = -3$;

д) $x^4 = 3$;

в) $x^3 = 3$;

е) $x^4 = -3$.

4. Решите уравнения:

а) $t^2 - 12t + 32 = 0$;

в) $x^6 - 12x^3 + 32 = 0$.

б) $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$;

5. Решите уравнения:

а) $t^2 + 4t - 32 = 0$;

в) $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$.

б) $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$;

6. Решите уравнения:

а) $t^2 + 12t + 32 = 0$;

в) $x^6 + 12x^3 + 32 = 0$.

б) $x^4 + 12x^2 + 32 = 0$;

7. Решите уравнения:

а) $t^2 - 12t + 38 = 0$;

в) $x^6 - 12x^3 + 38 = 0$.

б) $x^4 - 12x^2 + 38 = 0$;

8. Решите уравнения:

а) $t^2 - 6t + 8 = 0$;

б) $(x^2 - x)^2 - 6(x^2 - x) + 8 = 0$;

в) $(2x^2 + 5x + 4)^2 - 6(2x^2 + 5x + 4) + 8 = 0$;

г) $(2x^2 + 5x + 4)^2 - 12x^2 - 30x - 16 = 0$.

9*. При каких значениях параметра b число t является корнем данного уравнения? Для каждого найденного значения b найдите все корни этого уравнения.

а) $x^3 + 13x^2 - 14x + b = 0$, если $t = 0$ корень;

б) $x^4 + 17x^2 + b = 0$, если $t = -1$ корень;

в) $x^3 + 3x^2 + 5x + b = 0$, если $t = 1$ корень.

10*. Решите уравнение $a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$ относительно a . С помощью полученной схемы решите уравнения:

а) $(x^2 + 3)^2 - 5(x^2 + 3)x + 4x^2 = 0$;

б) $(3x^2 + 2x - 11)^2 - 5(2x + 1)(3x^2 + 2x - 11) + 4(2x + 1)^2 = 0$.

С-18. Дробные рациональные уравнения**1. Найдите корни уравнений:**

а) $\frac{3x-1}{x+2}=0$;

в) $\frac{3x-1}{x+2}=3$.

б) $\frac{3x-1}{x+2}=1$;

2. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x}=0$;

б) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x}=1$.

3. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$;

в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3x}{2}$.

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 3$;

4. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{2}{x+2}$.

б) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{12}$;

5. Решите целое уравнение: $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$, а затем найдите корни каждого из дробных рациональных уравнений:

а) $\frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^2 + 1} = 0$;

б) $\frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^2 - 1} = 0$;

в) $\frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^2 + 6x} = 0$;

г) $\frac{x^3 + 5x^2 - 5x + 1}{x + 1} = 1$;

$$д) \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x - 3}{x^3 + 5x^2 - 6x} = \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^3 + 5x^2 - 6x}.$$

6. Не производя построения графика функции $y = 1 + \frac{1}{x-1}$, найдите координаты всех точек пересечения этого графика с прямыми или укажите, что таких точек нет.

Уравнение прямой	$y = 0$	$y = 2$	$y = 1$	$y = x$	$y = -2x$
Точки пересечения графиков					

7. Числитель обыкновенной дроби на 52 меньше знаменателя этой дроби. Если числитель этой дроби увеличить на 2, а знаменатель увеличить на 25, то получим $\frac{1}{4}$. Найдите исходную дробь.

8. Одно из уравнений (а–в) соответствует решению задачи: «Мастер, работая один, делает всё задание в два раза быстрее, чем ученик. За какое время каждый из них, работая один, сделает все задание, если вместе они выполнят его за три дня?»

Выберите нужное уравнение и решите задачу.

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{3};$

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 3;$

в) $2x + x = 3.$

9. Составьте уравнение, соответствующее условию задачи:

«От пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 300 км, машина ехала со скоростью на 10 км/ч большей, чем обратно. Найдите скорость машины на пути от А до Б, если на всю поездку (не считая стоянки в Б) было затрачено 11 часов».

10*. Для каждого значения параметра b найдите количество различных корней уравнения $\frac{b \cdot x^2 + 8x - 3}{x + 2} = 1$.

С-19. Решение неравенств второй степени с одной переменной

1. Для каждого из данных трёх рисунков 16–18 с изображением графиков функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ решите указанные в таблице неравенства:

Рисунок	16	17	18
$f(x) > 0$			
$f(x) \geq 0$			
$f(x) < 0$			
$f(x) \leq 0$			

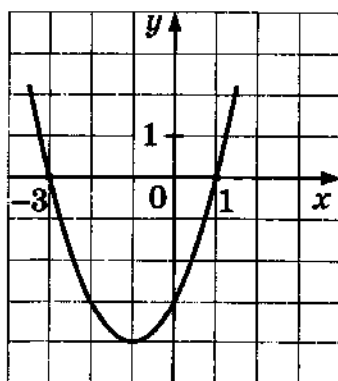


Рис. 16

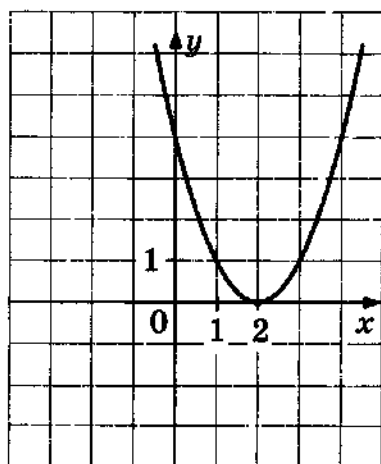


Рис. 17

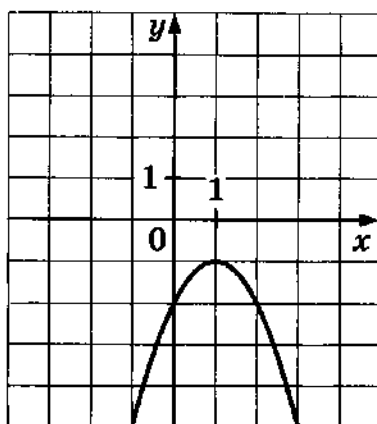


Рис. 18

2. Решите неравенства:

а) $3x^2 + x - 14 < 0$;

в) $-x^2 - 5x + 6 \geq 0$;

б) $7x^2 + 5x - 18 \geq 0$;

г) $-6x^2 - 5x + 1 < 0$.

3. Решите неравенства:

а) $3x^2 + x + 14 < 0$;

в) $-x^2 + 5x - 26 \geq 0$;

б) $7x^2 + 5x + 18 \geq 0$;

г) $-6x^2 - 5x - 11 < 0$.

4. Решите неравенства:

а) $3x^2 + 6x + 3 < 0$;

в) $-25x^2 - 10x - 1 \geq 0$;

б) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$;

г) $-36x^2 + 84x - 49 < 0$.

5. Решите неравенства:

а) $x^2 < 9$;

в) $(x-1)(3x+5) \geq 0$;

б) $x^2 \geq 13x$;

г) $x(2-3x) < 0$.

6. Не решая неравенств (1–4),

выберите из них:

а) те, решениями которых является отрезок;

б) те, решениями которых является вся числовая пря

- в) те, для которых можно найти такие три числа $x_1 < x_2 < x_3$, что x_1 и x_3 являются решениями неравенства, а x_2 не является решением неравенства;
- г) те, для которых справедливо утверждение: из того, что $x_1 < x_2 < x_3$ (x_1 и x_3 являются решениями неравенства), следует, что и x_2 является решением неравенства.

- 1) $7x^2 + 5x - 38 > 0$;
 2) $-6x^2 + 25x + 18 \geq 0$;
 3) $-17x^2 - 15x - 18 \leq 0$;
 4) $x^2 - 22x + 121 > 0$.

а	б	в	г

7. Найдите области определения функций:

- а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; в) $y = \frac{2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{4 - \sqrt{16 - x^2}}$;
 б) $y = \sqrt{16 - x^2}$; г) $y = \frac{x^3 - 5x + 11}{4 - \sqrt{16 - x^2}}$.

8*. При каких значениях параметра b число 8 является решением неравенства $x^2 - 7(b + 3)x + 4b > 0$?

9*. При каких значениях параметра b все числа из промежутка $[-3; 7]$ являются решениями неравенства $x^2 - (b + 3)x + b - 42 < 0$?

10*. При каких значениях параметра b решением неравенства $x^2 - (b + 3)x + 3 \leq b$ 0 является отрезок длины 1?

С-20. Задания с неравенствами второй степени

1. Решите неравенства:

$$\text{а) } (2x - 1)^2 > (3x + 5)^2; \quad \text{б) } \frac{x^2 + 5x - 5}{3} - \frac{2x + 1}{5} \leq \frac{7x^2 + 2}{15}.$$

2. Сколько различных целых чисел удовлетворяет неравенству:

$$\text{а) } x^2 - 6x - 27 < 0; \quad \text{б) } -x^2 + 11x + 7 \geq 0.$$

3. При каких значениях x график функции $y = x^2$ ниже графика функции $y = 8x - x^2$?

4. Решите системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 < 0, \\ x \leq 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 < 0, \\ x > -10; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 < 0, \\ x > 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 < 0, \\ x < -7. \end{cases} \end{array}$$

5. Решите системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 > 0, \\ x \geq -10; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 > 0, \\ x > 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2 - 5x - 50 \geq 0, \\ x \leq -7. \end{cases} \end{array}$$

6. Решите системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 + 5x - 50 \geq 0, \\ x^2 - 3x > 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x^2 + 5x - 50 > 0, \\ x^2 - 3x < 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 + 5x - 50 \leq 0, \\ x^2 - 3x > 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2 + 5x - 50 < 0, \\ x^2 - 3x \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

7*. Найдите область определения функций:

а) $y = \sqrt{6x - x^2} + \sqrt{7x - 1}$; б) $y = \sqrt{6x - x^2} + \sqrt{7|x| - 1}$;

в) $y = \sqrt{6x - x^2} + \sqrt{|x - 37| + 8x - 38}$.

8*. При каких значениях параметра b областью определения функции является отрезок:

а) $y = \frac{3x - \sqrt{-x^2 + 11x}}{x - b}$; б) $y = \frac{3x^3 - \sqrt{16 - x^2}}{x - b}$?

9*. При каких значениях параметра n наибольшим целым числом, принадлежащим области определения функции $y = \frac{4x^{31} - \sqrt{4 + 3x - x^2}}{x - n}$, является число 3?

10*. При каких значениях параметра b неравенство $bx^2 - 7x + b > 0$ выполняется при всех значениях b ?

С-21. Метод интервалов (1)

1. Для каждой из функций, графики которых изображены на рисунках 19 и 20, найдите:

- нули функций;
- точки, в которых меняется знак данных функций.

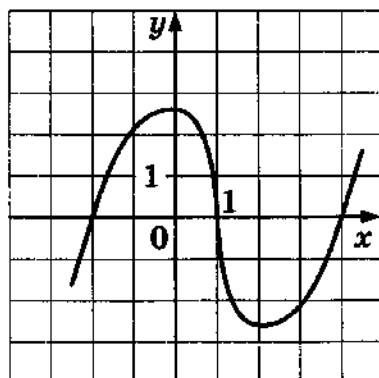


Рис. 19

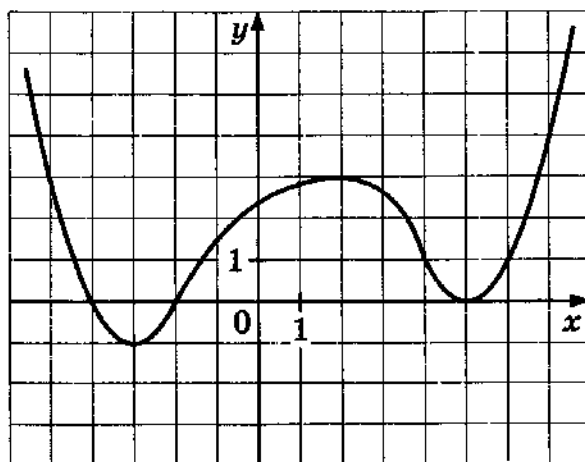


Рис. 20

2. Для каждой из функций задания 1 решите неравенства:

	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$
$y_1 = f(x)$				
$y_2 = f(x)$				

3. Найдите нули и точки перемены знака каждой из функций:

а) $f(x) = 3x(x+5)(x-3)$; в) $f(x) = 3x(x+5)^4(x-3)$;

б) $f(x) = 3x^2(x+5)(x-3)$; г) $f(x) = 3x(x+5)(x-3)^3$.

	а	б	в	г
Нули				
Точки перемены знака				

4. Для каждой из функций задания 3 решите неравенства:

	а	б	в	г
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				
$f(x) \geq 0$				
$f(x) \leq 0$				

5. Найдите нули и точки перемены знака каждой из функций:

а) $f(x) = (x^2+1)(x-2)(x+3)$; в) $f(x) = (x^2-9)(x-5)(x+3)$;

б) $f(x) = (x^2-1)(x-2)(x+3)$; г) $f(x) = (x^2-25)(x-5)^2(x+3)$.

	а	б	в	г
Нули				
Точки перемены знака				

6. Для каждой из функций задания 5 решите неравенства:

	а	б	в	г
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				
$f(x) \geq 0$				
$f(x) \leq 0$				

7. Решите неравенства:

а) $x^2 - 4x < 0$;

в) $x^3 - 4x^2 < 0$.

б) $x^3 - 4x < 0$;

8*. Задайте какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа -1 ; 7 ; 111 и которая меняет знак только в точке 7 .

9*. Дана функция $f(x) = (x+2)(x-b)(x+5b)^2$. При каком значении параметра b число 5 является:

а) нулем данной функции;

б) точкой перемены знака для данной функции?

10*. Найдите нули и точки перемены знака функции

$f(x) = (|x|-2)(x+3)|x-4|$ и решите соответствующие неравенства:

Нули	Точки перемены знака	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$

С-22. Метод интервалов (2)

1. Решите неравенства:

а) $\frac{x+2}{x-1} < 0$;

в) $\frac{3x+2}{5x-1} > 0$;

б) $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$;

г) $\frac{3x+2}{5x-1} \leq 0$.

2. Найдите области определения функций:

а) $y = \sqrt{(x+1)(x-2)}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$.

б) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$;

3. Даны неравенства, содержащие целые выражения (а-г), и неравенства, содержащие дробные рациональные выражения(1-6):

а) $(x-3)(x+3) < 0$;

1) $\frac{(x+3)^2}{x-3} < 0$;

б) $(x+3)^2(x-3) < 0$;

2) $\frac{x+3}{x-3} < 0$;

в) $(x-3)^2(x+3) < 0$;

3) $\frac{x+3}{(x-3)^2} < 0$;

г) $x^2(x-3)(x+3) < 0$.

4) $\frac{x^2(x+3)}{x-3} < 0$;

5) $\frac{x-3}{x+3} < 0$;

6) $\frac{x^2(x+3)^2}{x-3} < 0$.

Сопоставьте равносильные неравенства:

	а	б	в	г
Равносильные им среди 1–6				

4. Используя выражения $(x + 3)(x - 5)$; $\frac{x+3}{x-5}$; $\frac{x-5}{x+3}$ и знаки $>$; $<$; $\geq$; $\leq$, впишите в таблицу какое-нибудь неравенство, имеющее данный ответ:

Ответ	$(-3; 5)$	$[-3; 5]$	$(-3; 5]$	$(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$
Неравенство					

5. Решите неравенства:

а) $\frac{1}{x} < 1$;

в) $\frac{5}{x} > -1$.

б) $\frac{3}{x-2} \leq 1$;

6. Найдите и сравните между собой области определения функций:

$$y_1 = \sqrt{(x-5)(x+7)};$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{x-5}{x+7}};$$

$$y_3 = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+7};$$

$$y_4 = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+7}}.$$

7. Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $(x - 11)(x + 5) \leq 0$;

б) $(x - 11)(x + 5) < 0$;

в) $\frac{x-11}{x+5} \leq 0$;

г) $\frac{x+5}{x-11} \leq 0$.

Неравенство	а	б	в	г
Наибольшее целое решение				
Наименьшее целое решение				

8*. При каком натуральном значении параметра b неравенству $\frac{x-b}{x-5} \leq 0$ удовлетворяет ровно 10 целых чисел?

9*. При каком целом значении параметра b неравенству $\frac{x-b}{x-5} \leq 0$ удовлетворяет ровно 10 целых чисел?

10*. При каком целом значении параметра b неравенству $\frac{x^2 \cdot (x-b)}{x-5} \leq 0$ удовлетворяет ровно 10 целых чисел?

а) $3x + 5y = 13$; $M(3; 2)$;
 б) $x^2 + xy - 15 = 0$; $N(11; 3, 7)$;
 в) $x^3 + x^2 - y^2 + 1 = 0$; $P(1; 2)$;
 г) $(x - 11)(x + y - 5) = 0$. $F(0; 1)$;
 $Q(1; 0)$.

Уравнение	а	б	в	г
Точка				

а) с осью x ; б) с осью z .

3. Найдите все решения уравнения $x + 2y = 10$, являющиеся парами натуральных чисел, как, например (2; 4).

4. На одном чертеже постройте графики уравнений:

а) $x + 2y = 0$; в) $x + 2y = -6$.
б) $x + 2y = 4$;

Опишите вид и взаимное расположение всех этих линий.

5. На одном чертеже постройте графики уравнений:

а) $x - 2y = 0$; в) $3x - y = 0$.
б) $2x - y = 0$;

Опишите вид и взаимное расположение всех этих линий.

6*. Даны четыре рисунка 21–24, на которых изображены графики уравнений:

а) $x^2 - xy = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 = 0$;

б) $xy - y^2 = 0$;

г) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$.

Поставьте рисунки и уравнения в соответствие.

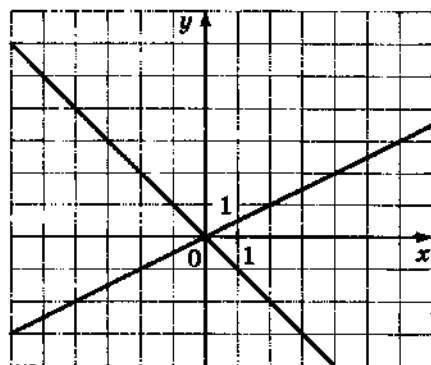


Рис. 21

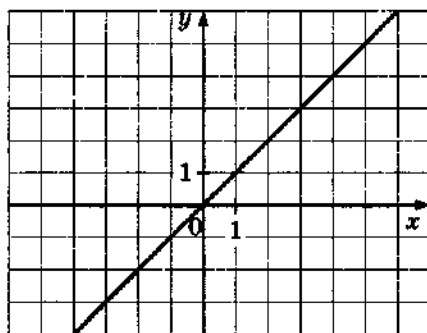


Рис. 22

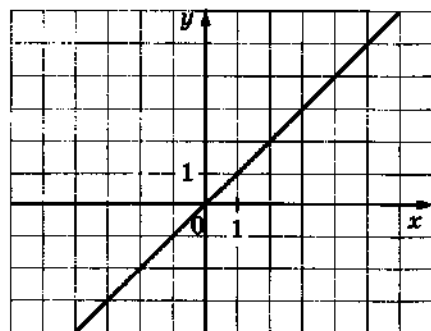


Рис. 23

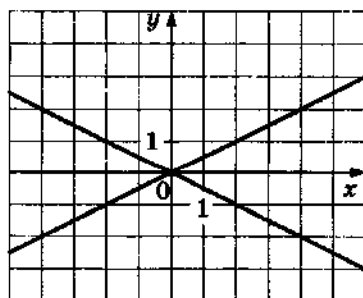


Рис. 24

Уравнение	а	б	в	г
Номер рисунка				

7*. При каком значении параметра b прямая

$3x + by - 5 = 0$ пересекает ось ординат в точке:

- а) с положительной ординатой;
б) с ординатой, меньшей -10 ?

8*. Постройте графики каждого из уравнений:

- а) $xy = 1$; б) $(x - 1)(y + 2) = 1$.**

9*. Постройте графики каждого из уравнений:

- а) $y - 2x^2 = 0$; б) $x - 2y^2 = 0$.**

10*. Найдите точку на графике уравнения $x^2 + 6x - y = 0$, сумма координат которой наименьшая.

С-24. Уравнение с двумя переменными и его график (2)

1. Какие из указанных точек

$A(0; -5); B(-3; 4); C(5; 0); D(4; 2); M(\sqrt{7}; -3\sqrt{2});$
 $N(-\sqrt{17}; 2\sqrt{3}); O(0; 0)$ лежат на окружности, заданной
 уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

2. Какие из данных уравнений являются уравнениями
 окружности:

- а) $(x + 4)^2 + (y - 3,1)^2 = 29$; г) $x^2 + y^2 = 3 + \sqrt{10}$;
 б) $2x^2 + 2y^2 = 8$; д) $x^2 + y^2 = 3 - \sqrt{10}$;
 в) $2x^2 + 3y^2 = 8$; е) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 18$?

3. Окружность задана уравнением $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
 Найдите:

- а) координаты центра окружности;
 б) радиус окружности;
 в) координаты точек окружности, лежащих на оси y ;
 г) координаты точек окружности, лежащих на оси x .

4. Выберите пары уравнений, графики которых совпа-
 дают:

- а) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 29$; в) $3x + 15y = 6$;
 б) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 2$; г) $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$.
 1) $x + 5y - 2 = 0$; 3) $3y - x = 0$;
 2) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 24 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + 10x - 4y = 0$.

а	б	в	г

5. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 - 6y = 16$;

в) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 24 = 0$.

б) $x^2 + y^2 + 8x = 0$;

6*. При каком значении параметра b прямая $y = 2x + b$:

а) проходит через центр окружности $x^2 + y^2 = 49$;

б) проходит через центр окружности $(x + b)^2 + (y - 2)^2 = 7$?

7*. Найдите длину отрезка пересечения окружности $x^2 + y^2 = 49$ и прямой $13x + 11y = 0$.

8*. При каком значении параметра r окружность, заданная уравнением $(x + 8)^2 + (y - 7)^2 = r^2$, не имеет общих точек с осями координат?

9*. Сколько общих точек имеют с окружностью $x^2 + y^2 = 8$ прямые:

а) $y = -x$;

в) $y = 2 - x$;

б) $y = 1 - x$;

г) $y = 12 - x$?

10*. Как располагаются на координатной плоскости графики, заданные уравнениями? На каждом из рисунков нарисуйте несколько таких окружностей.

а) $(x - m)^2 + (y - 2)^2 = 4$;

в) $(x - m)^2 + (y - 2)^2 = m^2$;

б) $(x - m)^2 + (y - m)^2 = 4$;

г) $(x - m)^2 + (y - 2)^2 = m$.

С-25. Уравнение с двумя переменными и его график (3)*

1. Постройте график уравнения:

а) $\frac{2x+3y-6}{x} = 0$;

в) $\frac{2x+3y-6}{x+y} = 0$.

б) $\frac{2x+3y-6}{y+2} = 0$;

2. Используя график уравнения $x^2 + y^2 = 1$, постройте графики уравнений:

а) $y = \sqrt{1-x^2}$;

в) $x = \sqrt{1-y^2}$;

б) $y = -\sqrt{1-x^2}$;

г) $x = -\sqrt{1-y^2}$.

3. Используя график уравнения $x + y = 4$, постройте графики уравнений:

а) $|x| + y = 4$;

в) $|x| + |y| = 4$.

б) $x + |y| = 4$;

4. Используя график уравнения $x \cdot y = 2$, постройте графики уравнений:

а) $(x-3)y = 2$;

в) $(x-3)(y+2) = 2$.

б) $x(y+2) = 2$;

5. Используя график уравнения $(x-3)(y+2) = 2$, постройте графики уравнений:

а) $(|x|-3)(y+2) = 2$;

в) $(|x|-3)(|y|+2) = 2$.

б) $(x-3)(|y|+2) = 2$;

6. Используя график уравнения $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$, постройте графики уравнений:

а) $(|x|-3)^2 + (y-2)^2 = 1$;

в) $(|x|-3)^2 + (|y|-2)^2 = 1$.

б) $(x-3)^2 + (|y|-2)^2 = 1$;

7. Используя график уравнения $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, постройте графики уравнений:

а) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; в) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 9$.

б) $(x - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 9$;

8. При каком значении параметра b графики уравнений $x^2 + y^2 = 4$ и $|x| + |y| = b$ имеют ровно четыре общие точки?

9. При каком значении параметра b графики уравнений $x^2 + y^2 = b$ и $|x| + |y| = 4$ имеют ровно восемь общих точек?

10. При каких значениях параметра b уравнение $x + b = \sqrt{2 - x^2}$ имеет ровно один корень?

С-26. Графический способ решения и исследования систем уравнений

1. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x \cdot y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x \cdot y = 49. \end{cases}$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

2. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} x \cdot y = 2, \\ x + y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \cdot y = 2, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \cdot y = 2, \\ 7x - y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \cdot y = 2, \\ y = -x^2 - 4x - 3. \end{cases}$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

3. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (y - 4)^2 = 9; \end{cases}$

$$\text{в) } \begin{cases} y = x^2, \\ (y-3-x)(y-3+x) = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = x^2, \\ x \cdot y = -3. \end{cases}$$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

4. Решите графически системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 4x - 3y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x \cdot y = 6, \\ x + y = -5. \end{cases}$$

5. Приведите какой-нибудь пример пары чисел $(a; b)$ так, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = ax + b \end{cases}$ имела число решений, указанное в таблице:

Количество решений	Ровно два решения	Ровно одно решение	Ноль решений
Пример пары чисел $(a; b)$			

6*. Сделайте рисунки, на которых у графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) с окружностью

$$x^2 + y^2 = 16:$$

- а) четыре общие точки; г) одна общая точка;
 б) три общие точки; д) нет общих точек.
 в) две общие точки;

7*. Приведите какой-нибудь пример тройки чисел $(a; b; c)$ ($a \neq 0$) таких, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ имела соответствующее количество решений, указанное в таблице:

Количество решений	Четыре решения	Три решения	Два решения	Одно решение	Ноль решений
Пример тройки чисел $(a; b; c)$					

8*. Сделайте рисунки, на которых у графика уравнения $(x - a)^2 + (x - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) с окружностью $x^2 + y^2 = 16$:

- а) две общие точки; в) нет общих точек.
б) одна общая точка;

9*. Приведите какой-нибудь пример тройки чисел $(a; b; R)$ ($R > 0$) таких, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases}$ имела соответствующее количество решений, указанное в таблице:

Количество решений	Два решения	Одно решение	Ноль решений	Более 19 решений
Пример тройки чисел $(a; b; R)$				

10*. Для каждого значения параметра b определите, сколько решений имеет система:

- а) $\begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + (y - b)^2 = 9; \end{cases}$
б) $\begin{cases} ((x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1) \cdot ((x + 3)^2 + y^2 - 9) = 0, \\ y = b. \end{cases}$

С-27. Решение систем уравнений второй степени

1. Решите системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + 2xy = -1, \\ x - 5y = 6. \end{cases}$$

2. Решите системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x \cdot y = 6, \\ x + y = 7; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \cdot y = 6, \\ -x + y = 4. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$

4. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy - x = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy - 2x^2 = 0. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x \cdot y = 25, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \cdot y = 20, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

6*. Найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x^3 + x^2y = 0$ и $y^3 + 2xy^2 - 27 = 0$. В ответе запишите длины всех отрезков, концами которых служат найденные точки.

7*. Найдите точки пересечения графиков уравнений:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36 \text{ и } x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$$

В ответе дайте точку, сумма кубов координат которой наименьшая.

8*. Изобразите решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5, \\ 7x^2 - y^2 = 6 \end{cases}$$

в виде точек на координатной плоскости.

В ответе дайте площадь четырёхугольника, вершинами которого являются эти точки.

9*. Найдите все пары чисел u и v , удовлетворяющие равенству $(u^2 - 2v)^6 + (u^2 + 2v - 8)^4 = 0$.

10*. Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(x^2 - 3x + 2)^2 + 3(y^2 - 5y - 14)^2 = 0, \\ 7x^2 + xy = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

С-28. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его периметр 30, а гипотенуза 13.

2. Найдите два натуральных числа, если известно, что сумма их квадратов на 4 больше их удвоенного произведения, а их среднее арифметическое равно 6.

3. Если в двузначном числе поменять местами цифры его десятичной записи, то разность квадратов начального и полученного двузначных чисел будет равна 495. Найдите эти числа.

4. Общее сопротивление электрической цепи при последовательном подключении вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = R_1 + R_2$, а при параллельном подключении — по формуле $\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Найдите каждое из двух сопротивлений, если при последовательном подключении общее сопротивление равно 50 Ом, а при параллельном 12 Ом.

5. Даны два круга. Площадь первого на 91π больше площади второго, а длина окружности первого круга на 14π больше длины окружности второго круга. Найдите радиусы этих кругов. (Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, площадь круга $S = \pi R^2$, где R — радиус круга.)

6. Банки «Хороший» и «Очень хороший» дают разные годовые проценты на вклад. Сергей Сергеевич положил в банк «Хороший» 100 000 рублей, а Пётр Петрович положил столько же в банк «Очень хороший». Через год у Петра Петровича было на 1000 рублей больше, чем у Сергея Сергеевича, а через два года больше на 2050 рублей. Сколько процентов годовых даёт каждый банк?

7. В предложенной на контрольной работе задаче на движение учащимся нужно было только составить уравнение или систему уравнений для решения этой задачи. Петя ввёл два неизвестных, а Вася одно. У Пети получилась система

$$\text{тема } \begin{cases} \frac{250}{v_1} + \frac{200}{v_2} = 20, \\ v_1 - v_2 = 5, \end{cases}$$

а у Васи уравнение $\frac{250}{v} + \frac{200}{v-5} = 20$.

а) Если Петя составил систему верно, верно ли составил уравнение Вася?

б) Если Вася составил уравнение неверно, верно ли составил систему Петя?

8. Проверая контрольные работы в классе, где учились Петя и Вася (задание 7), учительница Наталия Васильевна в работе Варвары увидела уравнение, относящееся к той же задаче: $\frac{250}{x+5} + \frac{200}{x} = 20$, и поставила Варваре за это задание

«+». Что получают Вася и Петя?

9. Попробуйте придумать задачу, которую решали (задание 7) Вася и Петя, и решите её любым способом.

10. Мастер, работая один, выполняет всю работу на пять дней быстрее, чем эту же работу выполняет в одиночку каждый из трёх его учеников. Мастер и три ученика, работая вместе, выполнили всю работу за два дня. Составьте систему и уравнение для решения этой задачи.

С-29. Неравенства с двумя неизвестными

1. Даны пары чисел:

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| а) $(-1; 2)$; | д) $(11,3; 12,3)$; |
| б) $(-3; 1)$; | е) $(0,235; 0,675)$; |
| в) $(3,5; 0)$; | ж) $(-2,7; 100)$. |
| г) $(0; 0)$; | |

Для каждого из данных неравенств найдите все пары чисел, им удовлетворяющие:

Неравенство	Пары чисел
$2x + 3y - 7 < 0$	
$2x + 3y - 7 > 0$	
$2x + 3y - 7 \leq 0$	
$2x + 3y - 7 \geq 0$	

2. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| а) $x \leq 4$; | в) $y - 3 < 0$; |
| б) $x > -2$; | г) $y + 2 \geq 1$. |

3. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$2x + 3y \leq 8.$$

4. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| а) $x + y \leq 0$; | в) $y - x - 3 < 0$; |
| б) $x - 2y > 0$; | г) $y + 2x \geq 3$. |

5. Найдите все такие значения a , при которых пара чисел $(a; 3-2a)$ удовлетворяет неравенству $7x - 3y + 11 \geq 0$.

6. Дан график уравнения $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ и точки $A(2; -1)$; $B(2; 2)$; $C(0; -1)$; $D(4; -2)$; $O(0; 0)$. Среди отрезков AB ; AC ; AD и AO найдите отрезки:

- а) имеющие с окружностью ровно одну общую точку;
- б) не имеющие с окружностью общих точек.

7. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- а) $x^2 + y^2 \leq 4$;
- в) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 < 4$;
- б) $(x - 2y)^2 + (2x + y)^2 \geq 20$;
- г)* $x^2 + 2x + y^2 - 4y > 4$.

8. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- а) $y > x^2 - 4$;
- в)* $x > y^2 - 4$;
- б) $y \leq x^2 - 2x$;
- г)* $x \leq y^2 - 2y$.

9. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- а) $x \geq y \cdot 4$;
- в)* $y \geq \frac{4}{x}$;
- б) $(x - 1)(y + 2) \geq 1$;
- г)* $x \geq \frac{4}{y}$.

10*. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- а) $(x - 1)(y + 2) \leq 0$;
- в) $x^2 + 3xy + 2y^2 < 0$;
- б) $(x - y)(x + y) \geq 0$;
- г) $\frac{x - 1}{y + 2} \leq 0$.

С-30. Системы неравенств с двумя неизвестными

1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \leq 6, \\ y \leq -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x > 4, \\ y < -2. \end{cases}$

2. Поставьте в соответствие системы неравенств (а-г) и рисунки (25-29).

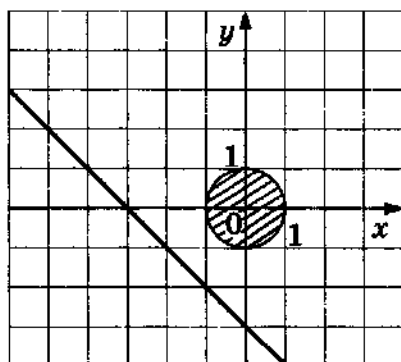


Рис. 25

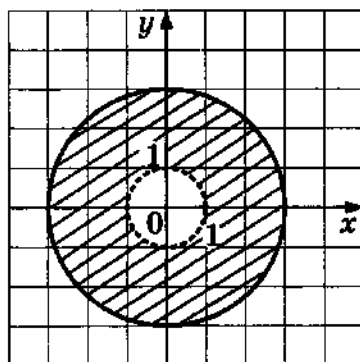


Рис. 26

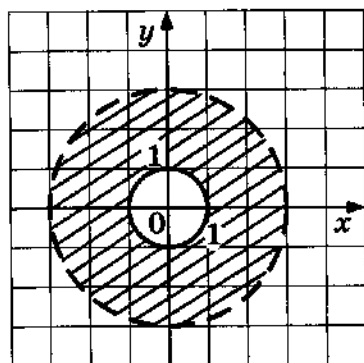


Рис. 27

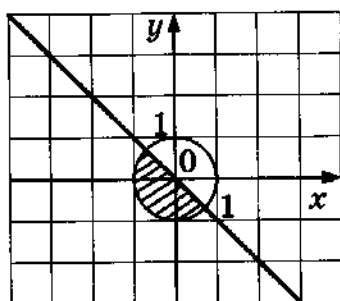


Рис. 28

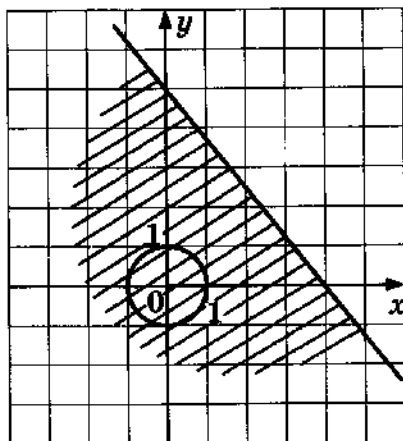


Рис. 29

а) $\begin{cases} x+y \leq 0, \\ x^2+y^2 \leq 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2 < 9, \\ x^2+y^2 \geq 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 9, \\ x^2+y^2 > 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+3 \geq 0, \\ x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$

Системы	а	б	в	г
Рисунки				

3. Покажите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y-3 \leq 0, \\ x+y+1 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x+y \leq 0, \\ x-y \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+y-3 \leq 0, \\ x+1 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x+y-3 \leq 0, \\ x-y+1 \geq 0. \end{cases}$$

4. Какие из данных систем неравенств имеют бесконечное множество решений, для каких решение состоит из одной пары чисел, для каких решений нет?

$$\text{а) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 9, \\ x^2 - 16 \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 9, \\ (x+3)^2 + y^2 \leq 16; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 9, \\ (x+3)^2 + y^2 \leq 49; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 9, \\ (x+3)^2 + y^2 \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 9, \\ (x+3)^2 + y^2 > 49; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 9, \\ y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Нет решений	Решение — одна пара чисел	Бесконечно много решений

5. Сколько пар целых чисел удовлетворяют системе неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y \geq x^2, \\ y < 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y > x^2, \\ y \leq 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} y > x^2, \\ y < 4? \end{cases}$$

6. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

$$а) \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ y - x + 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \geq 4, \\ y \leq -3, \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y \leq 0. \end{cases}$$

7. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

$$а) \begin{cases} y \geq \sqrt{x}, \\ y \leq 2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y \leq \sqrt{4 - x^2}, \\ y \geq -2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y \geq \sqrt{x}, \\ y \leq x^2; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} y \leq \sqrt{4 - x^2}; \\ y \geq x. \end{cases}$$

8. Пусть пара чисел $(a; b)$ является решением системы неравенств: $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 8 - x^2. \end{cases}$

а) Какие значения может принимать число a ?

б) Какие значения может принимать число b ?

9. При каком значении параметра a фигура, заданная множеством решений системы уравнения и неравенства, содержит отрезок длины 6?

$$а) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ 2x + 3y = a; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 \leq 9, \\ y = a \cdot x? \end{cases}$$

10*. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} y + x^2 \geq -5, \\ y + x^2 \leq 6, \\ x^2 \leq 1. \end{cases}$$

С-31. Последовательности

1. Какие из чисел 40; 21; 1,111111; 342; 4096; 49; 1,111111; 317 скорее всего подходят в качестве седьмого члена данных последовательностей (а–е)?

- а) 1; 4; 9; 16; 25; 36; ...;
 б) 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...;
 в) 100; 90; 80; 70; 60; 50; ...;
 г) 1; 1,1; 1,11; 1,111; 1,1111; 1,11111; ...;
 д) 1; 4; 16; 64; 256; 1024; ...
 е) 0; 7; 26; 63; 124; 215; ...;

Последовательность	а	б	в	г	д	е
Седьмой член						

2. Выписали подряд по порядку сто четыре первых члена последовательности: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{104}$.

- а) Какие члены последовательности являются соседними с x_{43} ?
 б) Какой член последовательности является предыдущим по отношению к x_{37} ?
 в) Какой член последовательности является последующим по отношению к x_{60} ?
 г) Сколько членов находится между x_{13} и x_{46} ?
 д) Сколько выписано членов с нечётными номерами?

3. Найдите седьмые члены каждой из заданных последовательностей:

а) $b_n = \frac{n}{n+3}$;

б) $p_n = n^2 - 6n$;

в) $a_n = 8n - 5$;

г) $x_n = \frac{2^n}{32}$;

$$\text{д) } l_n = (-1)^n n; \quad \text{е) } y_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{23}.$$

4. Выпишите второй, третий и четвёртый члены последовательностей, заданных рекуррентным соотношением:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3; & \text{в) } a_1 = 2; a_{n+1} = 2a_n + 1. \\ \text{б) } b_1 = 3; b_{n+1} = 2b_n; & \end{array}$$

5. Сколько отрицательных членов у каждой из заданных последовательностей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } b_n = \frac{n-5}{n+3}; & \text{в) } a_n = 8n - 35; \\ \text{б) } a_n = 8n - 5; & \text{г) } p_n = 16n - n^2? \end{array}$$

6. Дана последовательность $b_n = \frac{n}{n+1}$.

- а) Найдите b_{n+1} .
 б) Вычислите: $b_{n+1} - b_n$.
 в) Используя результат пункта б), докажите, что каждый последующий член последовательности больше предыдущего.

7. Выпишите последовательность последних цифр в десятичной записи десяти чисел, начиная с 1, являющихся полными квадратами натуральных чисел, и найдите сумму всех десяти членов этой последовательности.

8. Пусть последовательность задана формулой $c_n = \frac{n^2}{n+2}$.

Задайте формулой последовательность, состоящую из:

- а) всех членов данной последовательности c_n с чётными номерами;
 б) всех членов данной последовательности c_n , начиная с c_3 .

9. Сколько среди членов последовательности

$$x_n = 1 + \frac{24}{n+3} \text{ целых чисел?}$$

10. Найдите наибольший член каждой из :
 тельностей:

а) $p_n = 19 - 3n$;

в) $a_n = 20n - n^2$;

б) $b_n = \frac{13n+2}{n}$;

г) $a_n = 27n - 2n^2$.

С-32. Арифметическая прогрессия

1. Вставьте на пропущенные места такие числа, чтобы полученные четыре числа, взятые в данном порядке, были последовательными членами арифметической прогрессии.

а) $3; 9; _ ; _$.

в) $3; _ ; _ ; 9$.

б) $3; _ ; 9; _$.

г) $_ ; _ ; 3; 9$.

2. Напишите формулу n -го члена арифметической прогрессии и найдите её десятый член, если:

а) $a_1 = 4; d = 5$;

в) $a_1 = 7; d = -2$;

б) $a_1 = -31; d = 7$;

г) $a_1 = d = 0$.

3. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 4n - 15$. Найдите:

а) a_1 ;

г) $a_{154} - a_{156}$;

б) d ;

д) $\frac{a_{23} + a_{25}}{2} - a_{22}$.

в) $a_{143} - a_{142}$;

(Ответы желательно найти устно.)

4. Арифметическая прогрессия задана формулой

$a_n = 65 - 4n$. Найдите:

а) сколько в этой прогрессии положительных членов;

б) наибольший из отрицательных членов прогрессии;

в) каким членом в этой прогрессии является число -335 .

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

а) $x_{53} = 530; x_{55} = 550$;

б) $\begin{cases} a_6 - a_5 = 3; \\ a_7 + a_8 = 41. \end{cases}$

6. Найдите все значения p , при которых числа p^2 ; $p + 2$; $5p$, взятые в данном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

7. На прямой $3x + 5y - 11 = 0$ взяты точки A_1 ; A_2 ; ...; A_n , абсциссы которых составляют соответственно арифметическую прогрессию, заданную формулой $a_n = 7 + 10n$. Найдите формулу для вычисления ординат этих точек.

8. Напишите формулу всех натуральных чисел, которые:

- а) делятся без остатка на 7;
- б) при делении на 8 дают в остатке 5;
- в) в десятичной записи имеют последнюю цифру 9;
- г*) имеют сумму всех цифр в десятичной записи, делящуюся на 9.

9*. Дано сто первых членов арифметической прогрессии

$$a_n = 4 + \frac{2}{13}n. \text{ Сколько среди них целых чисел?}$$

10*. Первый член арифметической прогрессии равен 20, а произведение её 50 первых членов равно 0. Сколько различных значений может быть у разности этой прогрессии?

С-33. Сумма арифметической прогрессии

1. Найдите сумму первых 10 членов каждой из заданных арифметических прогрессий:

а) $x_n = 3 + 5n$;

в) $b_n = -11 + 2n$;

б) $a_n = 53 - 3n$;

г) $c_n = -5,3$.

2. Найдите сумму первых n членов арифметических прогрессий:

а) $3 + 7 + 11 + 13 + \dots$;

в) $10 + 5 + 0 + (-5) + \dots$;

б) $13 + 11 + 9 + 7 + \dots$;

г) $7 + 7 + 7 + 7 + \dots$.

3. Найдите сумму первых n членов арифметических прогрессий:

а) $y_n = 5 + 3n$;

в) $a_n = 2 - 21n$.

б) $b_n = 13n - 45$;

4. Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 53$; $a_{20} = -33$;

в) $a_{10} + a_{11} = 5$;

б) $a_2 = 77$; $a_{19} = -76$;

г) $a_{13} = a_{19} = 5$.

(Постарайтесь сделать это «в одну строчку».)

5. Найдите среднее арифметическое первых n членов арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $x_n = 13 + 7,5n$;

б) $b_n = 0,3 + 0,7n$.

6. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

а) $a_{10} = 27$; $S_{10} = 90$;

в) $S_{101} - S_{100} = 16$; $a_{100} = 13$.

б) $S_{10} = 90$; $S_9 = 63$;

7. Найдите формулу для вычисления суммы:

- а) первых n натуральных чисел $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$;
- б) первых n натуральных чисел вида $7n-5$.
 $(2 + 9 + 16 + \dots + (7n - 5))$;
- в) сумму первых 100 натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2.

8. Найдите n , если

- а) $a_n = 3n - 1$; $S_n = 610$;
- б) $a_n = 2n - 18$; $S_n = -70$.

9. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 5n - 4$. Найдите суммы вида:

- а) $a_1 + a_3 + \dots + a_{39}$;
- б) $a_{15} + a_{16} + \dots + a_{39} + a_{40}$.

10*. Докажите, что:

- а) сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле $S_n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n$;
- б) последовательность, заданная формулой $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$, может быть рассмотрена как последовательность сумм n первых членов арифметической прогрессии, у которой $x_1 = a + b$; $d = 2a$.

С-34. Геометрическая прогрессия

1. Вставьте на пропущенные места такие положительные числа, чтобы полученные четыре числа, взятые в данном порядке, были последовательными членами геометрической прогрессии.

а) $2; 8; _ ; _$.

в) $2; _ ; _ ; 8$.

б) $2; _ ; 8; _$.

г) $_ ; _ ; 2; 8$.

2. Напишите формулу n -го члена геометрической прогрессии, и найдите её пятый член, если:

а) $b_1 = 5; q = 2$;

в) $b_1 = 7; q = -1$;

б) $b_1 = -5; q = -2$;

г) $b_1 = q = 1$.

3. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 3 \cdot 2^n$. Найдите:

а) a_1 ;

г) $a_{154} : a_{156}$;

б) q ;

д) $\frac{a_{23} \cdot a_{25}}{a_{24}^2}$.

в) $a_{143} : a_{142}$;

(Ответы желательно найти устно.)

4. Геометрическая прогрессия задана формулой

$a_n = 64(0,5)^n$. Найдите:

а) сколько в этой прогрессии членов, являющихся целыми числами;

б) наибольший из нецелых членов прогрессии;

в) каким членом в этой прогрессии является число 2^{-345} ?

5. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

а) $x_9 = 3 \cdot 2^8$ и $x_{11} = 3 \cdot 2^{10}$;

в) $\begin{cases} a_6 : a_5 = 3; \\ a_7 + a_8 = 3^{13}. \end{cases}$

б) $x_9 = 3 \cdot 2^{10}$ и $x_{11} = 3 \cdot 2^{12}$;

6. Найдите все значения p , при которых числа p ; $p + 4$; $p + 16$, взятые в данном порядке, являются последовательными членами геометрической прогрессии.

7. На прямой $3x - 5y = 0$ взяты точки $A_1; A_2; \dots; A_n$, абсциссы которых составляют соответственно геометрическую прогрессию, заданную формулой $a_n = 7 \cdot 10^n$. Найдите формулу для вычисления ординат этих точек.

8. Банк дает вкладчику 6% годовых. Запишите формулу для вычисления вклада через n лет, если первоначальный взнос был a рублей.

9. Количество вещества в растворе каждый день уменьшается на 6%. Запишите формулу для вычисления количества вещества через n дней, если первоначальное количество вещества a .

10*. Напишите формулу для вычисления произведения первых n членов геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \text{ если } b_1 = 2.$$

С-35. Сумма геометрической прогрессии

1. Найдите суммы (S_5) пяти первых членов каждой из геометрических прогрессий:

а) $b_1 = 1; q = 2;$

г) $c_1 = 32; q = \frac{1}{2};$

б) $a_1 = 2; q = 3;$

д) $b_1 = 7; q = -1;$

в) $x_1 = 2; q = -3;$

е) $x_1 = -2; q = 1.$

2. Распределите способы нахождения сумм в задании 1 по оптимальным, на ваш взгляд, способам вычисления:

По формуле в виде $S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$	По формуле в виде $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$	По формуле в виде $S_n = b_1 \cdot n$	Устно без формул

3. Какие из следующих утверждений являются верными для любой геометрической прогрессии?

а) Сумма любых двух членов геометрической прогрессии с чётными номерами есть положительное число.

б) Произведение любых двух членов геометрической прогрессии с нечётными номерами есть положительное число.

в) Если два первых члена геометрической прогрессии положительны, то и все члены этой прогрессии положительны.

г) Если два первых члена геометрической прогрессии больше единицы, то и все члены этой прогрессии больше единицы.

д) Если первый член и знаменатель прогрессии целые числа, то и сумма любых n первых членов прогрессии — целое число.

е) Сумма первых 23 членов геометрической прогрессии не может быть равной нулю.

ж) Сумма первых 32 членов геометрической прогрессии не может быть равной нулю.

з) Если $x^2 = y \cdot z$, то числа y ; x ; z являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

и) Если числа y ; x ; z являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, то $x^2 = y \cdot z$.

к) Если $0 < q < 1$, то $b_n > b_{n+1}$.

4. Запишите сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_1 = 2$; $q = 3$;

г) $b_1 = 2$; $q = -1$;

б) $b_1 = 2$; $q = -3$;

д) $b_1 = 2$; $q = 1$.

в) $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{3}$;

5. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_n = 2$; $q = 3$;

в) $b_n = 2$; $q = -1$;

б) $b_n = 2$; $q = \frac{1}{3}$;

г) $b_n = 2$; $q = 1$.

6. Дана геометрическая прогрессия $b_1 = 5$, $q = 2$.

а) Найдите $\frac{S_{13} - S_{12}}{S_{12} - S_{11}}$.

б) Запишите формулу для нахождения суммы квадратов n первых членов этой прогрессии.

в) Запишите формулу суммы первых 15 членов этой прогрессии с нечётными номерами.

7. Вычислите:

а) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^7 - 2^8$; б) $1 - 3 + 9 - 27 + \dots - 3^{13} + 0,25 \cdot 3^{14}$.

8*. В геометрической прогрессии сумма первых 17 членов с чётными номерами в 5 раз больше суммы первых 17 членов с нечётными номерами. Найдите знаменатель этой прогрессии.

9*. Найдите сумму:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1}$ (при $x \neq 1$);

б) $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots + (-2)^{n-1}x^{n-1}$ ($x \neq -0,5$);

в) $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ ($x \neq 3$).

10*. Найдите наименьшее положительное значение первого члена прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{3}$, при котором сумма пяти первых членов этой прогрессии — натуральное число.

С-36. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Докажите, что последовательность, все члены которой равны 6, является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией.

2. Сумма 23 первых членов последовательности равна 92. Найдите седьмой член этой последовательности, если она является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией.

3. В геометрической прогрессии $b_1; b_2; b_3; \dots; b_{25}$ $b_1 \neq b_2$. Члены с нечётными номерами образуют арифметическую прогрессию $b_1; b_3; b_5; \dots; b_{23}; b_{25}$, сумма которой $S_{13} = -130$. Найдите сумму (S_{25}) данной геометрической прогрессии.

4. Второй, третий и пятый члены арифметической прогрессии являются соответственно первыми тремя членами геометрической прогрессии. Найдите эти три числа, если их сумма равна 7.

5. Даны три первых члена арифметической прогрессии: $a; a + d; a + 2d$. Найдите

$\frac{a_1}{d}$, если числа $a; a + d; \frac{4}{3}(a + 2d)$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

6. Дана арифметическая прогрессия a_n , у которой $a_1 = 2$; $d = 3$, и последовательность $b_n = 5^{a_n}$.

а) Найдите b_1 и b_2 .

б) Найдите $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ и докажите, что последовательность

$b_n = 5^{a_n}$ является геометрической прогрессией.

в) Вычислите $\sqrt[153]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{10}}$.

7*. Дана последовательность $b_n = 4^n - 3n$. Напишите формулу суммы её первых n членов.

8*. Найдите сумму $2 + 22 + 222 + 2222 + \dots + \underset{n \text{ раз}}{222\dots 2}$.

9*. Докажите, что среди всех членов арифметической прогрессии a_n , где $a_1 = 0$; $d = 3$, есть 12 чисел, являющихся последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

10*. Докажите, что среди всех членов геометрической прогрессии b_n , где $b_1 = 1$; $q = 2$, нет трех чисел, являющихся тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

С-37. Примеры комбинаторных задач. Перестановки

1. В городе три кинотеатра, в каждом из которых можно посмотреть четыре фильма: «Осень», «Лето», «Весна» и «Зима». Сколькими способами можно выбрать кинотеатр и фильм?

2. Света пришла в магазин «Все по 50 рублей», чтобы купить или духи, или набор карандашей. В магазине пять видов духов, шесть разных наборов карандашей. Каждая покупка по 50 рублей. У Светы всего 50 рублей. Сколькими способами она может сделать покупку?

3. Сколькими способами можно число 2^7 представить в виде суммы двух натуральных слагаемых? ($3 + 24$ и $24 + 3$ считать за один способ).

4. Вычислите:

а) $3!$;

$$\text{г) } \frac{23!}{21!};$$

б) $7!$;

$$\text{д) } \frac{101! + 100!}{101! - 100!}.$$

в) $5! + 1!$;

5. Сколькими способами можно переставить буквы в фамилии Нешков?

6. Рассматриваются все различные четырехзначные числа, в десятичной записи которых используются по одному разу цифры 2; 6; 7 и 8.

а) Сколько таких чисел?

б) Сколько среди таких чисел нечетных?

7. На полке в произвольном порядке стоят шесть томов собрания сочинений А.С. Пушкина.

а) Сколькими способами можно расставить тома? (например: 1, 3, 4, 5, 6, 2).

б) Скольким способами можно расставить тома так, чтобы 1-й и 2-й стояли вместе?

(например: 3, 4, 2, 1, 5, 6).

в) Скольким способами можно расставить тома так, чтобы 1-й и 2-й не стояли вместе?

(например: 3, 4, 2, 6, 1, 5).

8. Сколько нулей стоит в конце десятичной записи числа:

а) 230^5 ;

в) $766!$?

б) $10!$;

9. Сколькими способами можно переставить буквы в фамилии Макарычев?

10*. Вася пригласил к себе пятерых гостей, но часть из них или даже все могут не прийти. Сколькими способами могут собраться гости, если по крайней мере один гость пришел?

С-38. Размещения и сочетания

1. Используя формулы $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ и $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$,

вычислите:

а) A_6^3 ;

г) $\frac{C_{12}^5}{C_{12}^7}$;

б) $\frac{A_{56}^{10}}{A_{55}^9}$;

д) $\frac{A_6^5}{C_6^5}$.

в) C_{23}^{21} ;

2. В 9 классе «А» 25 человек. Одного из них просят стереть с доски, а другого — принести новый маркер. Сколькими способами можно выбрать этих двух учащихся?

3. В 9 классе «Б» 24 человека. Сколькими способами можно выбрать троих для сегодняшнего дежурства?

4. Сколько существует различных пятизначных чисел, в десятичной записи которых используются:

а) по одному разу цифры 1; 2; 3; 5; 7; 8; 9?

б) по одному разу цифры 0; 2; 3; 5; 7; 8; 9?

5. В 9 «А» 13 девочек и 12 мальчиков. Надо сформировать группу из трёх мальчиков и двух девочек. Сколькими способами можно сформировать группу? (В ответе можно записать только формулу без вычислений.)

6. Среди 25 различных изделий ровно пять высшего качества. Сколькими способами можно отобрать 15 изделий, среди которых ровно три высшего качества? (В ответе можно записать только формулу без вычислений.)

7. Из 23 человек формируются три бригады по 8, 8 и 5 человек соответственно. Сколькими способами можно сформировать эти бригады? (В ответе можно записать только формулу без вычислений.)

8. Придумайте задачу, ответом которой служит число:

а) A_{23}^{21} ;

б) $C_{23}^{21} \cdot C_3^2$.

9. Матч между командами 9 «А» и 9 «Б» закончился со счетом 3:3. Сколькими способами могут распределиться голы, забитые в ворота каждой из команд?

(например: А; Б; Б; А; А; Б).

10*. 18 параллельных прямых пересечены другими 20 параллельными прямыми. Сколько получилось параллелограммов?

С-39. Начальные сведения по теории вероятностей

1. Какие из данных предложений являются верными?

- а) Если монету бросить 10 раз, то ровно 5 раз выпадет решка и ровно 5 раз выпадет орел.
- б) Если игральную кость бросить 60 000 раз, то 3 очка выпадет приблизительно 10 000 раз.
- в) При бросании монеты 100 раз вероятность того, что герб выпадет ровно 50 раз, равна 0,5.
- г) При бросании игральной кости 1000 раз вероятность того, что 2 очка не выпадет ни разу, равна 0.
- д) При бросании игральной кости 1000 раз вероятность того, что число 5 не выпадет ни разу, близка к 0.
- е) В коробке лежат 27 карандашей двух цветов: красного и синего. Вероятность того, что вытащенный из коробки карандаш будет синим, равна 0,5.
- ж) В коробке лежат 45 карандашей двух цветов: красного и синего. Если известно, что вероятность того, что вытащенный из коробки карандаш будет синим, равна 0,4, то в коробке 27 красных карандашей.

2. Бросается игральная кость. Определите вероятность того, что

- а) выпадет пять очков;
- б) выпадет более пяти очков;
- в) выпадет менее чем пять очков;
- г) выпадет не более чем пять очков;
- д) выпадет не менее чем пять очков;
- е) выпадет любое число очков, кроме пяти.

Результаты занесите в таблицу:

Результат опыта	а	б	в	г	д	е
Вероятность						

3. Бросаются монеты. Какова вероятность, что на всех брошенных монетах выпадет герб, если:

- а) бросается одна монета; в) бросаются три монеты?
б) бросаются две монеты;

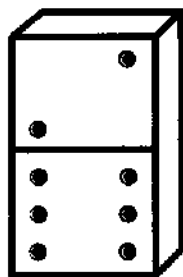
4. Вася бросил игральную кость и записал результат. Затем игральную кость бросил Дима. Какова вероятность того, что у Димы получился результат:

- а) тот же, что и у Василия;
б) отличный от результата Василия?

5. Коля нашел бракованную игральную кость, на которой не было грани с двумя очками, зато было две грани с пятью очками. Какова вероятность того, что при бросании такой кости выпадет:

- а) наименьшее простое число; в) нечетное число очков;
б) четное число очков; г) число очков, отличное от 2.

6. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной наугад фишке домино равна 8? (Фишка домино выглядит так: очки от 0 (пусто) до 6; всего 28 фишек.)



7. В личном шахматном турнире участвуют пять шахматистов из России и семь шахматистов из Украины. Проведена жеребьевка, после которой начались шесть игр. Какова вероятность того, что российский шахматист Кузнецов будет играть

- а) с шахматистом из Украины;
- б) с шахматистом из России?

8*. Дима, Петя, Вася, Коля и Артем сели в ряд на скамейку. Какова вероятность того, что:

- а) Петя будет сидеть на крайнем месте;
- б) между Колей и Артемом будут сидеть ровно три мальчика;
- в) Дима будет сидеть рядом с Артемом;
- г) Дима будет сидеть рядом с Артемом, причем справа от него;
- д) Дима будет сидеть справа от Артема, но не обязательно рядом с ним;
- е) Дима и Артем не будут сидеть рядом?

9*. Две стороны треугольника равны 20 и 15 соответственно, а длина третьей выбирается произвольно (равновероятно) из чисел 7; 10; 12; 15; 20; 25; 30. Какова вероятность того, что данный треугольник будет:

- а) равнобедренным;
- б) прямоугольным;
- в) остроугольным;
- г) тупоугольным?

10.* Электропоезда Топольград–Березовск ходят каждый час: в 5 часов, в 6 часов и т.д., а электропоезда Топольград–Кленовск с той же платформы ходят также каждый час: в 5 часов 20 минут, в 6 часов 20 минут и т.д. Дима приходит на эту платформу и садится на первый из пришедших поездов. Какова вероятность того, что Дима сядет на поезд до Кленовска?

6. Автомобиль движется по шоссе со скоростью 60 км/ч от пункта А до пункта В, расстояние между которыми 180 км.

Задайте функцию $S(t)$ (км) (для $0 \leq t \leq 3$ (ч)):

- а) расстояния от автомобиля до пункта А;
- б) расстояния от автомобиля до пункта В;
- в) расстояния от автомобиля до пункта С, находящегося на одинаковом расстоянии от пунктов А и В.

7. Без построения графика функции $y = 4x^2 - x - 2$ найдите все точки этого графика:

- а) с абсциссой 3;
- б) с ординатой -2;
- в) с равными координатами;
- г) сумма координат которых равна нулю.

8*. При каких значениях параметра b на графике функции $y = x^2 + 6x + b$:

- а) ровно одна точка с ординатой 8;
- б) ровно две точки с ординатой 8;
- в) нет точек с ординатой 8?

9. Дана функция $f(x) = \frac{(x-10)(x+3)}{x(x-1)^2}$. Во втором столбце таблицы укажите знак значения функции в точке x : «+», если оно положительно, и «-», если отрицательно.

x	-2	-0,7	1,8	6,3	112
Знак $f(x)$					

10*. Функция $y = [x]$ определяет наибольшее целое число, не превосходящее числа x . Решите уравнение:

- а) $[x] = 5$;
- б) $[x + 1] = 5$;
- в) $[2x] = 5$.

С-2. Область определения и область значений функции

1. Сопоставьте данные функции с их областью определения:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$;

3) $P(t) = \frac{t}{\sqrt{t+2}}$;

2) $g(x) = x\sqrt{x+2}$;

4) $y = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$.

а) $(-2; +\infty)$;

г) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

б) $[2; +\infty)$;

д) $[-2; +\infty)$;

в) $(2; +\infty)$;

е) $\mathbb{R}$.

Функция	1	2	3	4
Область определения				

2. Какие из данных функций определены на всем множестве действительных чисел?

а) $y = 3x - 1$;

г) $y = 3x - \frac{1}{x^2 - 9}$;

б) $y = 3x - \frac{1}{x^2}$;

д) $y = \sqrt{(2+x)^2}$;

в) $y = 3x - \frac{1}{x^2 + 9}$;

е) $y = (\sqrt{2+x})^2$.

3. Из данных высказываний выберите верные:

а) Функция $y = \sqrt{3-x}$ определена для всех x из промежутка $(-3; 1]$.

б) Областью определения функции $y = \sqrt{3-x}$ является множество $(-\infty; 3)$.

в) Функция $y = \sqrt{3-x}$ определена для всех x из промежутка $(-3; 4]$.

г) Областью определения функции $y = \sqrt{3-x}$ является множество $(-\infty; 3]$.

4. Найдите область определения функций:

$$1) f(x) = \frac{x-5}{x^2+25};$$

$$3) P(t) = \frac{t^5-10}{\sqrt{t+43}};$$

$$2) g(x) = (x-7)\sqrt{x+7};$$

$$4) y = \frac{t^2-9}{t-3}.$$

5. Для каждой из данных функций (1–6) определите вид числового множества (а–е), которое является областью её определения:

$$1) y = \frac{5-t}{4+\sqrt{t-2}};$$

а) вся числовая прямая;

$$2) y = \frac{5-t}{\sqrt{t-2}};$$

б) числовой отрезок;

$$3) y = \frac{5-t}{(t-2)^2+1};$$

в) интервал;

$$4) y = \sqrt{x-4} + \sqrt{9-x};$$

г) полуинтервал;

$$5) y = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} - \frac{7}{\sqrt{9-x}};$$

д) числовой луч;

$$6) y = \frac{7-\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-4}}.$$

е) открытый числовой луч.

Функция	1	2	3	4	5	6
Вид области определения						

6*. Для функции $y = (x-6)(x+1) \cdot \sqrt{x}$ найдите:

а) область определения;

б) нули функции (те значения переменной, при которых значение функции равно нулю).

7*. Постройте графики функций:

а) $y = x - 3$;

в) $y = (\sqrt{x-3})^2$;

б) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

г) $y = (\sqrt{5-x})^2 + 2(\sqrt{x-4})^2$.

8*. При каких значениях параметра a областью определения функции является множество действительных чисел?

а) $y = ax + 7$;

в) $y = \frac{2x+1}{2x+a}$;

б) $y = 2x + \frac{2}{x^2 - a}$;

г) $y = \frac{2x+1}{ax+2}$.

9*. При каких значениях параметра b областью определения функции является числовой луч?

а) $y = 3x + b$;

в) $y = \frac{\sqrt{3x+b}}{x-6}$.

б) $y = \sqrt{3x+b}$;

10*. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{x^2 - 3x + 4}{5 + \sqrt{x-b}} = 0$ имеет ровно один корень?

С-3. Область значений функции

1. Сопоставьте каждую из функций с областью её значений:

а) $g(t) = \sqrt{x}$;

1) $[0; +\infty)$;

б) $y = x^2 + 6$;

2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $y = |x|$;

3) $(-\infty; +\infty)$;

г) $f(x) = \frac{1}{x-6}$;

4) $[6; +\infty)$.

д) $y = 6x - 1$.

Функция	а	б	в	г	д
Область значений функции					

2. Для каждой из данных функций найдите её область значений:

а) $y = |x| - 3$;

в) $y = 7 - |x|$.

б) $y = |x| + 2$;

3. Для каждой пары функций, приведенной в таблице, установите, совпадают их области определения или не совпадают. В случае совпадения пишите «да», в случае несовпадения «нет».

$f_1(x) = 2x - 7$;

$f_5(x) = \frac{\sqrt{2x-7}}{x+4}$;

$f_2(x) = \frac{2x-7}{x^2+10}$;

$f_6(x) = \frac{\sqrt{2x-7}}{x-4}$;

$$f_3(x) = \frac{2x-7}{x^2-4};$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{2x-7}}{x^2-16}.$$

$$f_4(x) = \sqrt{2x-7};$$

Функция	$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$	$f_4(x)$	$f_6(x)$
Функция	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$
Да или нет						

4. Найдите область значений функции:

а) $y = 5x - 3$ при $-1 \leq x \leq 3$;

б) $y = 5 - 3x$ при $-1 \leq x \leq 3$.

5. Представьте себе график функции $y = x^2$ и, используя свой воображаемый график, найдите область значений функции $y = x^2$ при:

а) $2 \leq x \leq 4$;

в) $-2 \leq x \leq 4$;

б) $-4 \leq x \leq -2$;

г) $-4 \leq x \leq 4$.

6*. Найдите множество значений функции

$$y = |x - 5| + |x + 9| \text{ при } -9 \leq x \leq 5.$$

7. Укажите, какие из данных высказываний являются верными:

а) Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции.

б) Все значения независимой переменной образуют область значений функции.

в) Корнем квадратным из неотрицательного числа a называется любое положительное число b , такое, что $b^2 = a$.

г) Уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, если $f(x) = 0$, а $g(x) \neq 0$.

д) Квадратное уравнение имеет корни, если его дискриминант неотрицателен.

е) Областью определения функции $y = x^2$ является множество всех неотрицательных чисел.

ж) Областью значений функции $y = x^2$ является множество всех неотрицательных чисел.

з) Если две стороны треугольника имеют длины 2 и 6, то областью значений длины третьей стороны этого треугольника является множество (4; 8).

8. Сколько различных целых значений принимает функция $y = \frac{4x+5}{3}$ при $-1 \leq x \leq 11$?

9.* Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2t+8, & \text{если } -6 \leq t \leq 2, \\ -\frac{1}{2}t+13, & \text{если } 2 < t \leq 6, \end{cases}$$

и определите:

а) область значений функции;

б) все такие значения t , для которых значение функции равно 2;

в) все такие значения t , для которых значение функции равно -2;

г) все такие целые значения функции, которые она принимает более одного раза.

10*. Выполните пункты а) и б):

а) При каких значениях параметра b уравнение $5x - 2 = b$ имеет хотя бы один корень на множестве $(-2; 1]$?

б) Найдите область значений функции $y = 5x - 2$ при $-2 < x \leq 1$.

Сравните ответы пунктов а) и б) и попробуйте сделать вывод о способе нахождения области значений функции на данном множестве.

С-4. Возрастание и убывание функций

1. Какие из данных функций возрастают на всей области определения, а какие убывают на всей области определения?

а) $y = 5x - 4$;

е) $y = -\frac{7}{x}$;

б) $y = -6x + 1$;

ж) $y = 9$;

в) $y = \sqrt{x}$;

з) $y = -x^3 + 1$;

г) $y = -2x^2$;

и) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3}$.

д) $y = \frac{2}{x}$;

Убывают на всей области определения	
Возрастают на всей области определения	
Не являются возрастающими (убывающими) на всей области определения	

2. Какие из приведенных функций возрастают на промежутке $[0; 7]$?

а) $y = -8x + 13$;

е) $y = -\frac{11}{x}$;

б) $y = 13x - 2$;

ж) $y = -5$;

в) $y = \sqrt{x}$;

з) $y = x^3$;

г) $y = x^2$;

и) $y = -|x|$.

д) $y = \frac{4}{x}$;

3. Какие из приведенных функций убывают на промежутке $(0; 7)$?

а) $y = -8x + 13$;

е) $y = -\frac{11}{x}$;

б) $y = 13x - 2$;

ж) $y = -5$;

в) $y = \sqrt{x}$;

з) $y = x^3$;

г) $y = x^2$;

и) $y = -|x|$.

д) $y = \frac{4}{x}$;

4. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на всей числовой оси. Расположите в порядке возрастания числа: $f(-2)$; $f(-6)$; $f(15)$; $f(0)$; $f(10\sqrt{2})$.

5*. При каких значениях параметра k :

а) функция $y = kx + 11$ является возрастающей?

б) функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$?

в) функция $y = \frac{k}{x}$ $y(-8) < y(-7)$?

г) функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[k; 5]$?

6*. Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[-2; 21]$. Укажите, какие из данных утверждений являются верными:

а) $f(7) < f(19)$;

б) $f(0) - f(-1)$ — отрицательное число;

в) $f(6) \cdot f(5)$ — положительное число;

г) $f(21) < f(x)$ при всех x из промежутка $[-2; 21]$;

д) если число 10 является нулем данной функции, то в промежутке $[-2; 10)$ функция принимает положительные значения;

е) уравнение $f(x) = f(8)$ на промежутке $[-2; 21]$ может иметь два различных корня.

7*. $f(x)$ – возрастающая функция. Решите неравенство:
 $x(f(-19) - f(19)) > 0$.

8*. На промежутке $[-2; 7]$ постройте график какой-либо функции $y = f(x)$, если известно, что ее график проходит через начало координат и:

а) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-2; 7]$;

б) $f(x)$ убывает на промежутке $[-2; 7]$;

в) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-2; 0]$ и убывает на промежутке $[0; 7]$;

г) $f(x)$ убывает на промежутке $[-2; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; 7]$.

9*. Найдите, в какой точке промежутка $[6; 14]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее на этом промежутке значение. Во втором столбце таблицы напишите либо точку промежутка $[6; 14]$, либо напишите «невозможно определить».

Условие	В какой точке y принимает наибольшее на промежутке $[4; 10]$ значение
$f(x)$ возрастает на промежутке $[6; 14]$	
$f(x)$ убывает на промежутке $[6; 14]$	
$f(x)$ возрастает на промежутке $[6; 10]$ и убывает на промежутке $[10; 14]$	
$f(x)$ убывает на промежутке $[6; 10]$ и возрастает на промежутке $[10; 14]$	

10*. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x} + 2, & \text{если } 1 < x < 4; \\ 8 - x, & \text{если } 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

и определите:

- а) область определения функции;**
- б) область значений функции;**
- в) нули функции;**
- г) при каких значениях x функция принимает положительные значения;**
- д) при каких значениях x функция принимает отрицательные значения;**
- е) промежутки, на которых функция возрастает и в которых она убывает;**
- ж) в скольких точках графика функция принимает значение, равное 3,78.**

С-5. Квадратный трёхчлен

1. Запишите данные выражения(а-д) в виде квадратных трёхчленов вида ax^2+bx+c ($a \neq 0$) и заполните таблицу коэффициентов этого трёхчлена.

а) $6x^2 - 3x - 1$;

г) $(x - 4)^2$;

б) $4x - x^2$;

д) $3 - (2x + 1)^2$.

в) $(x - 1)(5x + 2)$;

	а	б	в	г	д
a					
b					
c					

2. Найдите корни квадратных трёхчленов:

а) $-5x^2$;

г) $3x^2 - 2x$;

б) $4x^2 - 64$;

д) $-x^2 - 11x$;

в) $-x^2 + 49$;

е) $x^2 - 5x + 6$.

3. Какие из данных квадратных трёхчленов не имеют корней?

а) $3x^2 + 2$;

г) $4x^2 - 7x$;

б) $5x^2 - 9$;

д) $-x^2 - 121$;

в) $-x^2 + 223$;

е) $x^2 - 4x + 15$.

4. При каких значениях m выражения тождественно равны?

а) $x^2 + 2x$ и $(x + 1)^2 + m$;

б) $x^2 - 4x + 6$ и $(x - 2)^2 + m$;

в) $x^2 - 10x + 10$ и $(x - m)^2 - 15$;

г) $-9x^2 + 6x - 4$ и $-(3x - 1)^2 + m$.

5. Выделите из квадратного трёхчлена квадрат двучлена:

а) $x^2 - 2x$;

в) $x^2 - 10x + 1$;

б) $x^2 - 6x + 12$;

г) $-25x^2 + 10x$.

6. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 + 5$;

в) $3(x - 2)^2 - 10$;

б) $(x + 1)^2 - 7$;

г) $16x^2 - 8x$.

7. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-x^2 + 42$;

в) $-8(x + 1)^2$;

б) $-(x - 3)^2 - 13$;

г) $-3x^2 + 6x$.

8*. Определите, имеет ли квадратный трехчлен

$ax^2 + 5x + 2$ корни, если график функции $y = ax^2 + 3x + 1$ проходит через точку:

а) $A(-5; 0)$;

в) $C(1; 10)$;

б) $B(1; 6)$;

г) $P(2; -4)$.

9*. При каких значениях параметра a наибольшее значение выражения $a(2x + 5a - 1)^2 + 4a^2 - 16$ равно нулю?

10*. Решите уравнение:

$$|x^2 + 6x + 20| - |x^2 + 10x + 26| = 8x.$$

С-6. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители

1. Разложите на множители первой степени:

а) $x^2 + 5x$;

г) $-5x^2 + 20$;

б) $-8x^2 + 16x$;

д) $x^2 - 3$.

в) $36x^2 - 1$;

2. Укажите, какие из данных разложений квадратного трёхчлена на множители первой степени выполнены верно?

а) $3x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(x - \frac{2}{3})$;

б) $3x^2 + 4x - 4 = 3(x - 2)(x + \frac{2}{3})$;

в) $3x^2 + 4x - 4 = 3(x + 2)(x - \frac{2}{3})$;

г) $3x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(3x - 2)$;

д) $3x^2 + 4x - 4 = (3x - 6)(x + \frac{2}{3})$;

е) $3x^2 + 4x - 4 = 3(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3})$;

ж) $3x^2 + 4x - 4 = x \cdot (3x + 4 - \frac{4}{x})$.

3. Какие из квадратных трёхчленов нельзя разложить на множители первой степени?

а) $x^2 - 11x - 2$;

г) $6x^2 + 24$;

б) $-6x^2 + 13x - 25$;

д) $x^2 - 14x + 49$?

в) $8x^2 + x - 3$;

4. Разложите квадратные трёхчлены на множители первой степени:

а) $x^2 + 4x - 5$;

в) $-2x^2 - 5x - 2$;

б) $4x^2 - 7x - 11$;

г) $25x^2 - 10x + 1$.

5. Сократите дроби:

а) $\frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1}$;

б) $\frac{2x - x^2 + 15}{2x^2 - 10x}$.

6. Найдите наименьший общий знаменатель трех алгебраических дробей:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1}; \frac{3x - 1}{2x + 3}; \frac{3x}{2x^2 + 5x + 3}.$$

7. Разложите на множители первой степени:

а) $2t^2 + 5t - 3$;

б) $2t^2 + 5at - 3a^2$.

8*. Корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа -2 и -3 . Напишите разложение этого трехчлена на множители первой степени, если:

а) старший коэффициент трехчлена равен $a = 6$;

б) свободный член трехчлена равен $c = 12$;

в) второй коэффициент трехчлена $b = -10$;

г) значение квадратного трехчлена при $x = 1$ равно -12 .

9*. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень, равный -3 . Напишите разложение этого трехчлена на линейные множители, если:

а) старший коэффициент квадратного трехчлена $a = 5$;

б) свободный член этого квадратного трехчлена $c = -54$.

10*. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{|x - 2|}$ и найдите

все значения параметра m , при которых прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

С-7. Функция $y = ax^2$, её свойства и график

1. Заполните таблицу значений функции $y = -0,5x^2$ и, используя симметрию графика относительно оси y , постройте график этой функции:

x	0	0,5	1	2	3	4	5
y							

2. При каком значении коэффициента a график функции $y = ax^2$ проходит через точку M , если:

- а) $M(1; 6)$; в) $M(300; -300)$?
- б) $M(-4; 0,2)$;

3. Перечислите свойства функции $y = -5x^2$:

- а) область определения;
- б) область значений;
- в) нули функции;
- г) для каких значений переменной функция убывает;
а для каких возрастает;
- д) наибольшее и наименьшее значения функции.

4. Выполните пункты а) и б):

- а) Пусть наибольшее значение функции $y = ax^2$ на промежутке $[3; 4]$ равно 16. Найдите ее наименьшее значение на этом промежутке.
- б) Пусть наибольшее значение функции $y = ax^2$ на промежутке $[3; 4]$ равно -16 . Найдите ее наименьшее значение на этом промежутке.

5. Найдите общие точки графика $y = 3x^2$ и графика $y = 4x - 1$.

6*. Прямая, параллельная оси y и проходящая через точку $B(-2; 0)$, пересекает графики функций $y = -x^2$; $y = 2x^2$ и $y = -0,5x^2$ в точках C ; K и N соответственно. Найдите отношение длин отрезков CK и CN .

7*. Прямая $y = 4$ пересекает график функции $y = ax^2$ в точках A и B , а график $y = bx^2$ — в точках C и D . Пусть точка A лежит на отрезке CD . Запишите в порядке возрастания числа a ; b и 0 .

8*. На графике функции $y = 5x^2$ найдите все точки, сумма координат которых равна 6.

9*. Сколько различных целых значений принимает функция $y = \frac{1}{4}x^2$ при $-4 \leq x \leq 7$?

10*. При каких значениях параметра b наибольшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[-5; b]$ равно 25?

С-8. Преобразование графиков функций

1. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 30).

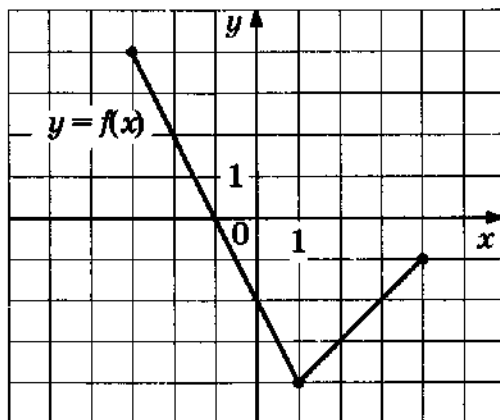


Рис. 30

Свойства функции:

область определения функции $[-3; 4]$;

область значения $[-4; 4]$;

-1 – ноль функции;

на промежутке $[-3; -1)$ $y > 0$;

на промежутке $(-1; 4]$ $y < 0$;

возрастает в промежутке $[1; 4]$;

убывает в промежутке $[-3; 1]$.

Для каждого задания (1–8) выберите нужное преобразование исходного графика (а–з), постройте график и по приведённому образцу опишите свойства функции.

а) Параллельный перенос вдоль оси y на 1 вверх.

б) Симметрия относительно оси x .

в) Симметрия относительно оси y .

г) Параллельный перенос вдоль оси x на 4 влево.

- д) Параллельный перенос вдоль оси x на 2 вправо.
- е) Растяжение вдоль оси y в 2 раза.
- ж) Сжатие вдоль оси y в 2 раза.
- з) Параллельный перенос вдоль оси y на 3 вниз.

- 1) Постройте график функции $y = -f(x)$.
- 2) Постройте график функции $y = f(x) + 1$.
- 3) Постройте график функции $y = f(x) - 3$.
- 4) Постройте график функции $y = f(x - 2)$.
- 5) Постройте график функции $y = f(x + 4)$.
- 6) Постройте график функции $y = f(-x)$.
- 7) Постройте график функции $y = 2f(x)$.
- 8) Постройте график функции $y = 0,5f(x)$.

2. Постройте график функции $y = |f(x)|$, оставив без изменения части графика $y = f(x)$, для которых $f(x) \geq 0$, а остальные отразите симметрично относительно оси x .

3. Постройте график функции $y = f(|x|)$, оставив без изменения части графика $y = f(x)$, для которых $x \geq 0$, а затем отразите эту часть симметрично оси y .

С-9. Преобразование графиков функции $y = ax^2$

1. Используя графики функции $y = ax^2$, постройте графики функций (1–6):

1) $y = x^2 + 3$.

2) $y = -2x^2 + 1$.

3) $y = 0,5(x - 1)^2$.

4) $y = -(x + 2)^2$.

5) $y = (x - 3)^2 - 4$.

6) $y = -2(x + 3)^2 - 1$.

2. Задайте квадратичную функцию, графиком которой является парабола вида $y = x^2$ с вершиной в точке $M(2; -6)$.

3. Задайте квадратичную функцию, графиком которой является парабола вида $y = x^2$, а нулями числа -1 и 3 .

4*. Задайте квадратичную функцию, наименьшее значение которой равно -4 , абсцисса вершины параболы равна -3 , а один из нулей функции равен -1 .

5*. Постройте линию, на которой лежат вершины парабол, являющихся графиками функций $y = (x - 3a)^2 + 2a$.

С-10. Квадратичная функция и её график

1. Даны квадратичные функции:

а) $y = -3x + x^2 - 5$;

в) $y = 5(3x - 1)(2 - x)$;

б) $y = 2x - x^2 + 3$;

г) $y = (2 - 3x)(5 - x)$.

Сопоставьте эти функции с соответствующими утверждениями:

1) Ветви параболы направлены вверх.

2) Ветви параболы направлены вниз.

2. Какие из данных утверждений являются верными?

а) Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) равен нулю, то вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ лежит на оси y .

б) Осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) является прямая $y = -\frac{b}{2a}$.

в) Если $(-5; 3)$ вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то выражение $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x + 5)^2 + 3$.

г) Если $(-5; 3)$ вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то выражение $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x - 5)^2 + 3$.

д) Если $(3; 8)$ вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ и график проходит через точку $(0; -3)$, то $a < 0$.

е) Если каждая из прямых $y = 7$ и $y = -7$ пересекает график функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то $|a| > 7$.

3. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 6x + 8$ и постройте ее график. Определите:

а) наименьшее значение функции;

б) область значений функции;

в) нули функции;

г) промежутки возрастания и убывания функции.

4. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 6x + 8$, сравните:

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| а) $y(7, 8)$ и $y(8, 7)$; | г) $y(3, 2)$ и $y(2, 8)$; |
| б) $y(-7, 8)$ и $y(-8, 7)$; | д) $y(3, 95)$ и 0. |
| в) $y(-7, 8)$ и $y(8, 7)$; | |

5. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 6x + 8$, решите неравенства:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| а) $x^2 - 6x + 8 < 0$; | в) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$; |
| б) $x^2 - 6x + 8 > 0$; | г) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. |

6. Используя график и свойства функции $y = x^2 - 6x + 8$, найдите:

- а) наибольшее значение функции на отрезке $[2 + \sqrt{2}; 5]$;
- б) наименьшее значение функции на отрезке $[1 - \sqrt{11}; -1]$;
- в) наименьшее значение функции на отрезке $[3 - \sqrt{7}; 3]$;
- г) наибольшее значение функции на отрезке $[1 - \sqrt{11}; 2]$.

7*. При каких значениях параметра c парабола $y = x^2 - 6x + c$ пересекает ось y в точке $(0; 10)$?

8*. При каких значениях параметра b парабола $y = x^2 + bx + 8$ пересекает ось x в точке $(10; 0)$?

9*. При каких значениях параметра a прямая $x = 4$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 - 6x + 8$?

10*. Дана функция: $y = -3x^2 - 7x + 34$. Найдите:

- а) наибольшее значение функции;
- б) наибольшее целое значение функции;
- в) при каком целом значении x значение функции наибольшее; найдите это значение.

С-11. Работа с графиком функции

1. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{при } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

а) Найдите значения функции в точках -2 ; 0 ; 2 ; 4 .

б) Постройте график данной функции.

2. Используя график и свойства квадратичных функций из задания 1, найдите:

а) нули функции;

б) промежутки монотонности и область значений функции;

в) сколько корней имеет уравнение (результаты занесите в таблицу):

Уравнение	$f(x) = 1$	$f(x) = -3$	$f(x) = -300$	$f(x) = 100$
Количество корней				

г*) число корней уравнения $f(x) = b$;

д*) при каких значениях параметра b уравнение $f(x) = b$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 4]$;

е*) при каких значениях параметра b уравнение $f(x) = b$ не имеет корней на луче $(-\infty; -1]$;

ж*) число корней уравнения $f(x) = -x + 1$;

з*) какие-нибудь два значения параметра b , при которых уравнение $f(x) = -x + b$ имеет не менее двух корней;

и*) какие-нибудь два значения параметра k , при которых уравнение $f(x) = kx + 1$ имеет не более двух корней.

С-12. График квадратичной функции

1. Даны шесть графиков квадратичной функции (рис. 31–36) $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Для каждого случая сравните с нулем указанные в таблице числа (используйте знаки $=$; $<$; $>$).

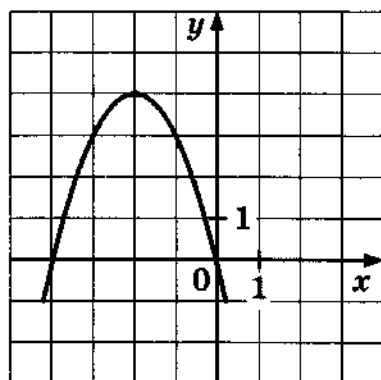


Рис. 31

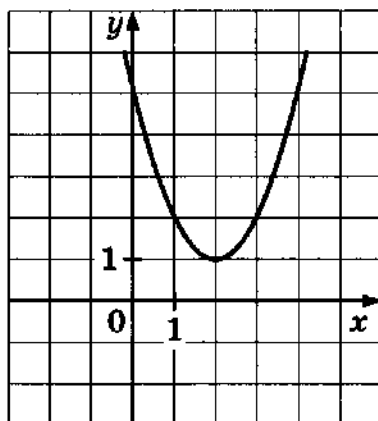


Рис. 32

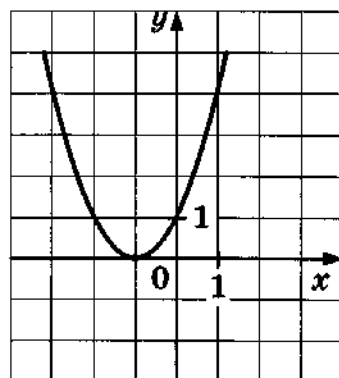


Рис. 33

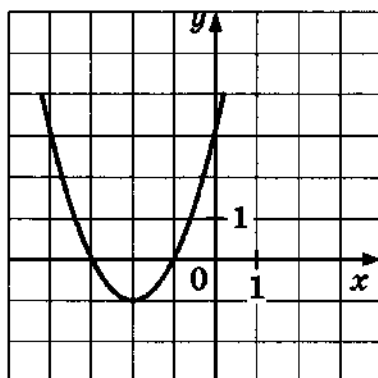


Рис. 34

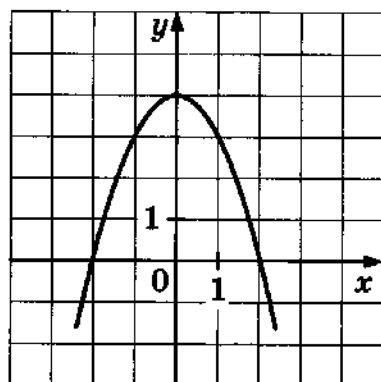


Рис. 35

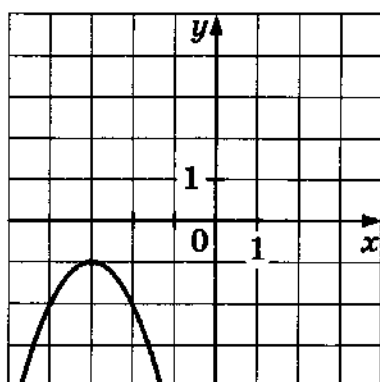


Рис. 36

	Рис. 31 (образец)	Рис. 32	Рис. 33	Рис. 34	Рис. 35	Рис. 36
a (старший коэффициент)	$a < 0$					
b (второй коэффициент)	$b > 0$					
c (свободный член)	$c = 0$					
D (дискриминант)	$d > 0$					

2. Используя «шаблон» параболы $y = -x^2$, постройте на пяти рисунках графики функции $y = -x^2 + px + q$, чтобы выполнялись условия, данные в таблице.

	Рис. А	Рис. Б	Рис. В	Рис. Г	Рис. Д
p	$p > 0$	$p > 0$	$p > 0$	$p > 0$	$p = 0$
q	$q < 0$	$q < 0$	$q < 0$	$q = 0$	$q > 0$
D	$D > 0$	$D < 0$	$D = 0$		

С-13. Степенная функция $f(x)=x^n$, n — натуральное число.

1. Функция задана формулой $y = x^{26}$. Сравните:

- а) $f(3,1)$ и $f(2,9)$; в) $f(-5,3)$ и $f(5,3)$;
б) $f(-5,1)$ и $f(-7,9)$; г) $f(\sqrt{3}-7)$ и $f(\sqrt{3}-8)$.

2. Функция задана формулой $y = x^{27}$. Сравните:

- а) $f(3,1)$ и $f(2,9)$; в) $f(-5,3)$ и $f(5,3)$;
б) $f(-5,1)$ и $f(-7,9)$; г) $f(\sqrt{3}-7)$ и $f(\sqrt{3}-8)$.

3. Найдите площадь треугольника, одной из вершин которого является начало координат, а две другие являются точками пересечения графика функции $y = x^6$ и прямой $y = 64$.

4. Функция задана формулой $y = x^4$. Вычислите:

- а) $\frac{f(9) - f(3)}{f(3) - f(0)}$;
б) $(f(2,1) + f(-2,1)) \cdot (f(1 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3} - 1))$.

5. На графике функции $y = x^n$ взяты точки A и B с абсциссами соответственно -1 и 1 . Найдите координаты точки пересечения прямой AB с осью y , если:

- а) $n = 56$; б) $n = 13$.

6. Сколько различных целых значений принимает функция $y = x^n$ на отрезке $[-1; 2]$, если:

- а) $n = 4$; б) $n = 3$?

7. Установите соответствие между функциями (1-4) и указанными свойствами (а-е).

- 1) $y = x^{23}$; 3) $y = 3x + 5$;
2) $y = x^{98}$; 4) $y = x^2 - 3$.

- а) Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.
- б) Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.
- в) Функция возрастает на всей области определения.
- г) Функция убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
- д) Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
- е) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Результаты занесите в таблицу.

а	б	в	г	д	е

8*. Найдите угловой коэффициент прямой, пересекающей график функции $y = x^5$ в точках с абсциссами:

- а) 0 и 2; б) -1 и 2.

9*. На графиках функций $y = x^{33}$; $y = x^{14}$ и $y = 0$ взяты соответственно точки A , B и C с абсциссой x_0 . Какая из данных точек лежит между двумя другими, если:

- a) $x_0 = 4$; б) $x_0 = 0,3$?**

10*. При каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с графиком функции $y = \frac{x^{24} - 1}{x^{12} - 1} - 1$ только одну общую точку?

С-14. Корень л-й степени

1. Вычислите:

a) $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{11^3}$; $\sqrt[3]{(-32)^3}$; $\sqrt[3]{13^6}$; $\sqrt[3]{(-13)^6}$;

$$6) (\sqrt[3]{5})^3; (\sqrt[3]{-7})^3; (\sqrt[3]{-6})^6; (\sqrt[3]{2})^{12}; (\sqrt[3]{0})^{118}; (\sqrt[3]{-133})^0.$$

2. Постройте график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и укажите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) промежутки монотонности функции;

г) нули функции.

3. Постройте графики функций:

a) $y = \left(\sqrt[5]{x^5} \right) ;$

6) $y = (\sqrt[7]{x})^7$.

4. Вычислите:

a) $\sqrt[6]{1}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{11^6}$; $\sqrt[6]{(-32)^6}$; $\sqrt[6]{13^{12}}$; $\sqrt[6]{(-13)^{12}}$;

$$6) (\sqrt[6]{5})^6; (\sqrt[6]{2})^{12}; (\sqrt[6]{0})^{113}; (\sqrt[6]{133})^0.$$

5. Постройте график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и укажите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) промежутки монотонности функции;

г) нули функции.

6. Постройте графики функций:

a) $y = \left(\sqrt[6]{x^6} \right);$

6) $y = (\sqrt[6]{x})^6$.

С-15. Дробно-линейная функция. Преобразование графиков функции

1. Постройте график функции $y = -1 + \frac{1}{x+2}$ и найдите:

- а) асимптоты;
- б) область определения функции;
- в) область значений функции;
- г) нули функции;
- д) промежутки монотонности данной функции.

2. Найдите асимптоты функций:

а) $y = \frac{5x+3}{x}$;

б) $y = \frac{x+4}{x+3}$.

3. Задайте дробно-линейную функцию с асимптотами $x = -2$; $y = 3$, график которой получен параллельным переносом:

а) графика функции $y = \frac{3}{x}$;

б) графика функции $y = -\frac{2}{x}$;

в) графика функции $y = -\frac{1}{2x}$.

4. Из данных графиков (рис. 37–40) выберите график функции $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

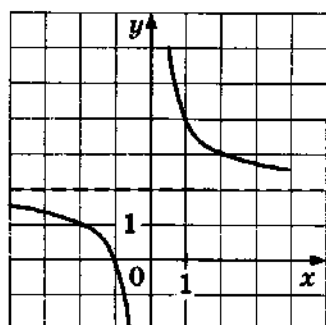


Рис. 37

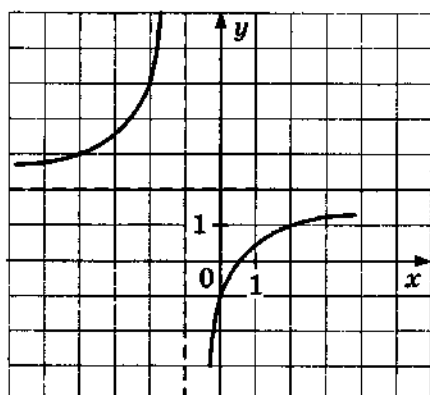


Рис. 38

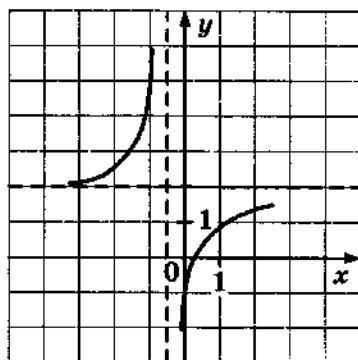


Рис. 39

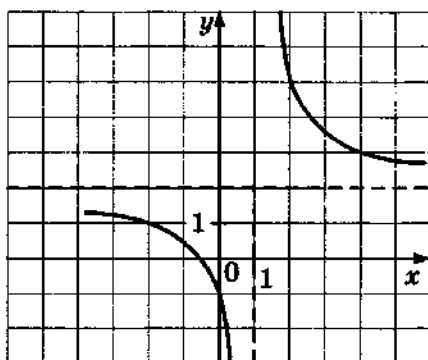


Рис. 40

5. Сколько точек пересечения имеют графики функций:

а) $y = x^2 + x$ и $y = \frac{1}{x}$;

б) $y = x^2 + x$ и $y = -\frac{1}{x}$?

6. Найдите все точки графика $y = 2 + \frac{3}{x-1}$, абсцисса и ордината которых являются целыми числами.

7. При каких значениях параметра b прямая $y = b$ не имеет общих точек с графиком функции:

а) $y = -3 + \frac{1}{x-2}$;

б) $y = \frac{3x+5}{4x-1}$?

8. Постройте график функции $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$ и, используя его, решите неравенства:

а) $f(x) < 0$;

в) $f(x) \leq 0$;

б) $f(x) > 0$;

г) $f(x) \geq 0$.

9*. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2 - \frac{1}{|x|+1}$ (график строить совершенно необязательно).

10*. Найдите область определения функции $y = \frac{|x|-x-1}{x}$ и постройте её график.

С-16. Степень с рациональным показателем

1. Представьте степень с рациональным показателем в виде корня:

$2^{\frac{3}{4}}$	$(0,2)^{\frac{1}{2}}$	$-3^{\frac{5}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$b^{-\frac{2}{5}}$	$2^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{3}{4}} + 7^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{7}}$

2. Представьте арифметический корень в виде степени с рациональным показателем:

$\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{13}$	$\sqrt[3]{(0,7)^2}$	$(\sqrt[4]{0,3})^2$	$b \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{h}}$

3. Найдите области определения выражений:

Выражение	Область существования
$\sqrt[4]{x-3}$	
$(x-3)^{\frac{1}{4}}$	
$\sqrt[5]{x-3}$	
$(x-3)^{\frac{1}{5}}$	
$(x-3)^{-\frac{1}{5}}$	
$(1+x^2)^{\frac{23}{73}}$	
$(1-2x+x^2)^{\frac{3}{8}}$	
$(1-2x+x^2)^{-\frac{3}{8}}$	

4. Установите соответствие между графиками функций (рис. 41–44) и формулами (а–г), которые их задают:

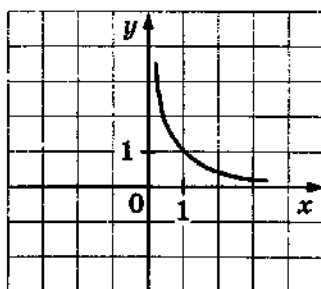


Рис. 41

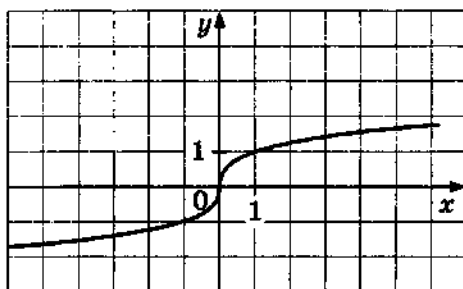


Рис. 42

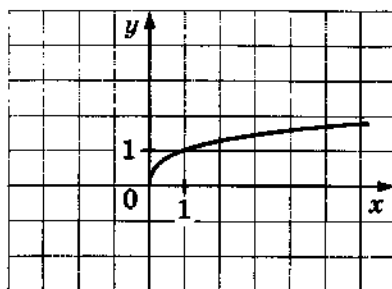


Рис. 43

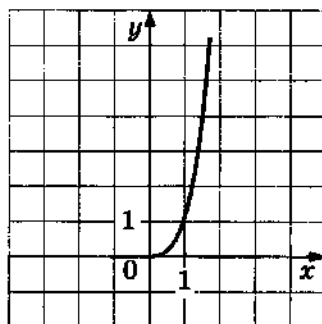


Рис. 44

а) $y = \sqrt[3]{x}$;

в) $y = x^{\frac{7}{2}}$;

б) $y = x^{\frac{1}{6}}$;

г) $y = x^{-0.3}$.

Рис. 41	Рис. 42	Рис. 43	Рис. 44

5. Постройте графики функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x^{\frac{1}{3}}; & \text{в) } y = (-x^{\frac{1}{3}}); \\ \text{б) } y = -x^{\frac{1}{3}}; & \text{г) } y = |x|^{\frac{1}{3}}. \end{array}$$

6. Постройте графики функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x^{\frac{1}{2}}; & \text{в) } y = (x+2)^{\frac{1}{2}}; \\ \text{б) } y = x^{\frac{1}{2}} + 2; & \text{г) } y = (x-1)^{\frac{1}{2}} - 3. \end{array}$$

7. Вычислите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } h^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{3}{5}} \cdot h^{-\frac{4}{15}}; & \text{в) } \frac{\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[15]{b^4}}; \\ \text{б) } (8h)^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{3}{5}} \cdot (-h^{-\frac{4}{15}}); & \text{г) } \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}} \right)^{-36}. \end{array}$$

8. Сократите дроби:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{a^{\frac{1}{2}} - b}{\frac{1}{a^4} + b^{\frac{1}{2}}}; & \text{б) } \frac{a^{\frac{1}{9}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b}. \end{array}$$

9*. Из формулы $2m^{\frac{1}{3}} - 5 + b^{-1} = 0$ выразите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } m \text{ через } b; & \text{б) } b \text{ через } m. \end{array}$$

10*. При каких значениях a график функции

$y = |x^{\frac{1}{2}} - 1| + |x^{\frac{1}{2}} - aq|$ **содержит отрезок длины 3 и не содержит никакого отрезка большей длины?**

С-17. Целое уравнение и его корни

1. Определите степень каждого из уравнений и найдите все его корни. Укажите количество различных корней уравнения в таблице.

- а) $(x - 5)(x^2 - 4x + 3) = 0$; в) $(x^2 + 4x - 21)^2(x + 8) = 0$;
б) $(x^3 - 6x^2 - 7x)(x^2 - 1) = 0$; г) $x^{19} + x^{17} = 0$.

Уравнение	а	б	в	г
Степень				
Корни				
Количество различных корней				

2. Решите уравнения:

- а) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$;
б) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 3x - 2 = 0$;
в) $3x^5 - 9x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 21x + 14 = 0$;
г) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 = 2x^2 - 6x + 4$.

3. Решите уравнения:

- а) $x^2 = 5$; г) $x^3 = -5$;
б) $x^2 = -5$; д) $x^4 = 5$;
в) $x^3 = 5$; е) $x^4 = -5$.

4. Решите уравнения:

- а) $t^2 - 10t + 16 = 0$; в) $x^6 - 10x^3 + 16 = 0$.
б) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$;

5. Решите уравнения:

- а) $t^2 - t - 72 = 0$; в) $x^6 - x^3 - 72 = 0$.
б) $x^4 - x^2 - 72 = 0$;

6. Решите уравнения:

а) $t^2 + 10t + 16 = 0$; в) $x^6 + 10x^3 + 16 = 0$.

б) $x^4 + 10x^2 + 16 = 0$;

7. Решите уравнения:

а) $t^2 - 10t + 26 = 0$; в) $x^6 - 10x^3 + 26 = 0$.

б) $x^4 - 10x^2 + 26 = 0$;

8. Решите уравнения:

а) $t^2 - 9t + 14 = 0$;

б) $(x^2 - x)^2 - 9(x^2 - x) + 14 = 0$;

в) $(2x^2 + 8x + 7)^2 - 9(2x^2 + 8x + 7) + 14 = 0$;

г) $(2x^2 + 8x + 7)^2 - 18x^2 - 72x - 49 = 0$.

9*. При каких значениях параметра b число t является корнем данного уравнения? Для каждого найденного значения b найдите все корни этого уравнения.

а) $x^3 + 12x^2 + 11x - b = 0$, если $t = 0$ корень;

б) $x^4 + 13x^2 + b = 0$, если $t = -1$ корень;

в) $x^3 + 2x^2 + 4x + b = 0$, если $t = 1$ корень.

10*. Решите уравнение $a^2 - 4ab + 3b^2 = 0$ относительно a .

С помощью полученной схемы решите уравнения:

а) $(x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) \cdot x + 3x^2 = 0$;

б) $(3x^2 + 5x + 4)^2 - 4(5x + 7)(3x^2 + 5x + 4) + 3(5x + 7)^2 = 0$.

С-18. Дробные рациональные уравнения

1. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{4x-1}{x+5} = 0;$

в) $\frac{4x-1}{x+5} = 4.$

б) $\frac{4x-1}{x+5} = 1;$

2. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-x} = 0;$

б) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-x} = 1.$

3. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{6};$

в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x}{3}.$

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = 6;$

4. Найдите корни уравнений:

а) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2};$

в) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x-2}.$

б) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{12};$

5. Решите целое уравнение: $x^3 + 7x^2 - 8x = 0$, а затем найдите корни каждого из дробных рациональных уравнений:

а) $\frac{x^3+7x^2-8x}{x^2+1} = 0;$

б) $\frac{x^3+7x^2-8x}{x^2-1} = 0;$

в) $\frac{x^3+7x^2-8x}{x^2+8x} = 0;$

$$г) \frac{x^3 + 7x^2 - 7x + 1}{x + 1} = 1;$$

$$д) \frac{2x^3 + 6x^2 - 8x - 5}{x^3 + 7x^2 - 8x} = \frac{x^3 - x^2 - 5}{x^3 + 7x^2 - 8x}.$$

6. Не производя построения графика функции $y = -2 + \frac{1}{x-2}$, найдите координаты всех точек пересечения этого графика с прямыми или укажите, что таких точек нет.

Уравнение прямой	$y = 0$	$y = 2$	$y = -2$	$y = x$	$y = 2x$
Точки пересечения графиков					

7. Числитель обыкновенной дроби на 11 меньше знаменателя этой дроби. Если числитель этой дроби увеличить на 13, а знаменатель увеличить на 82, то получим $\frac{1}{5}$. Найдите исходную дробь.

8. Одно из уравнений (а–в) соответствует решению задачи:

«Мастер, работая один, делает всё задание в три раза быстрее, чем ученик. За какое время каждый из них, работая один, сделает все задание, если вместе они выполняют его за шесть дней?»

Выберите нужное уравнение и решите задачу.

$$а) \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = 6;$$

$$в) 3x + x = 6.$$

$$б) \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{6};$$

9. Составьте уравнение, соответствующее условию задачи:

«От пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 240 км, машина ехала со скоростью на 20 км/ч большей, чем обратно. Найдите скорость машины на пути от А до Б, если на всю поездку (не считая стоянки в Б) было затрачено 10 часов».

10*. Для каждого значения параметра b найдите количество различных корней уравнения $\frac{b \cdot x^2 + 5x - 2}{x + 3} = 1$.

С-19. Решение неравенств второй степени с одной переменной

1. Для каждого из данных трёх рисунков 45–47 с изображением графиков функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ решите неравенства, указанные в таблице:

Рисунок	45	46	47
$f(x) > 0$			
$f(x) \geq 0$			
$f(x) < 0$			
$f(x) \leq 0$			

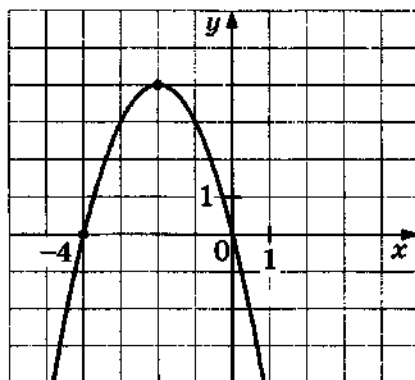


Рис. 45

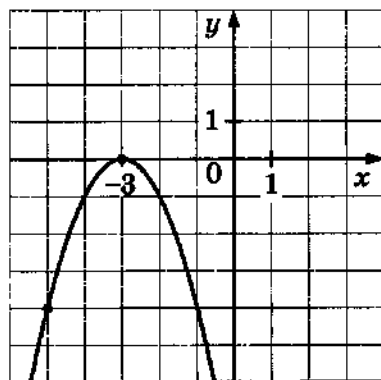


Рис. 46

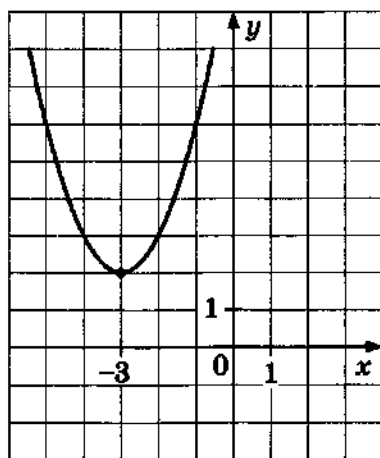


Рис. 47

2. Решите неравенства:

а) $5x^2 + 2x - 24 < 0$;

в) $-x^2 - 6x + 7 \geq 0$;

б) $6x^2 + 5x - 14 \geq 0$;

г) $-9x^2 - 8x + 1 < 0$.

3. Решите неравенства:

а) $2x^2 + x + 13 < 0$;

в) $-x^2 + x - 10 \geq 0$;

б) $3x^2 + 3x + 11 \geq 0$;

г) $-8x^2 - 7x - 15 < 0$.

4. Решите неравенства:

а) $5x^2 + 10x + 5 > 0$;

в) $-36x^2 - 12x - 1 \geq 0$;

б) $25x^2 - 20x + 4 \geq 0$;

г) $-49x^2 + 84x - 36 > 0$.

5. Решите неравенства:

а) $x^2 > 49$;

в) $(x - 2)(3x + 2) \geq 0$;

б) $x^2 \leq 10x$;

г) $x(3 - 5x) > 0$.

6. Не решая неравенств (1–4), выберите из них:

а) те, решениями которых является отрезок;

б) те, решениями которых является вся числовая прямая;

в) те, для которых можно найти такие три числа $x_1 < x_2 < x_3$, что x_1 и x_3 являются решениями неравенства, а x_2 не является решением неравенства;

г) те, для которых справедливо утверждение: из того, что $x_1 < x_2 < x_3$ (x_1 и x_3 являются решениями неравенства), следует, что и x_2 является решением неравенства.

$$1) 6x^2 + 3x - 11 > 0; \quad 3) -11x^2 - 9x - 10 < 0;$$

$$2) -5x^2 + 19x + 10 \geq 0; \quad 4) x^2 - 24x + 144 \geq 0.$$

а	б	в	г

7. Найдите области определения функций:

$$а) y = \sqrt{x^2 - 10x + 9}; \quad в) y = \frac{7 + \sqrt{x^2 - 10x + 9}}{5x^2 + x};$$

$$б) y = \sqrt{36 - x^2}; \quad г) y = \frac{x^5 - 4x + 3}{5 - \sqrt{25 - x^2}}.$$

8*. При каких значениях параметра b число 7 является решением неравенства $x^2 - 8(b + 2)x - 4b > 0$?

9*. При каких значениях параметра b все числа из промежутка $[-2; 8]$ являются решениями неравенства $x^2 - (b + 4)x + b - 21 < 0$?

10*. При каких значениях параметра b решением неравенства $x^2 - (b + 5)x + 5b \leq 0$ является отрезок длины 1?

С-20. Задания с неравенствами второй степени

1. Решите неравенства:

а) $(2x + 3)^2 > (3x - 2)^2$;

б) $\frac{x^2 + 3x - 2}{3} - \frac{5x + 1}{4} \leq \frac{7x^2 - 17}{12}$.

2. Сколько различных целых чисел удовлетворяет неравенству:

а) $x^2 - 8x - 24 < 0$;

б) $-x^2 + 10x + 6 \geq 0$?

3. При каких значениях x график функции $y = x^2$ выше графика функции $y = 6x - x^2$?

4. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 < 0, \\ x \leq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 < 0, \\ x > -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 < 0, \\ x > 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 < 0, \\ x < -6. \end{cases}$

5. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 > 0, \\ x \geq -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 > 0, \\ x > 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 6x - 40 \geq 0, \\ x \leq -6. \end{cases}$

6. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 6x - 40 \geq 0, \\ x^2 - 2x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 6x - 40 > 0, \\ x^2 - 2x < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 6x - 40 \leq 0, \\ x^2 - 2x > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + 6x - 40 < 0, \\ x^2 - 2x \leq 0. \end{cases}$

7*. Найдите область определения функций:

а) $y = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{6x - 1}$;

б) $y = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{6|x| - 1}$;

в) $y = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{|x - 39| + 7x - 40}$.

8*. При каких значениях параметра a областью определения функции является отрезок:

а) $y = \frac{7x - \sqrt{-x^2 - 13x}}{x - a}$; б) $y = \frac{7x^5 - \sqrt{100 - x^2}}{x - a}$?

9*. При каких значениях параметра n наибольшим целым числом, принадлежащим области определения функции $y = \frac{3x^{23} - \sqrt{5 + 4x - x^2}}{x - n}$, является число 4?

10*. При каких значениях параметра c неравенство $cx^2 - 6x + c > 0$ выполняется при всех значениях x ?

С-21. Метод интервалов (1)

1. Для каждой из функций, графики которых изображены на рисунках 48 и 49, найдите:

- нули функций;
- точки, в которых меняется знак данных функций.

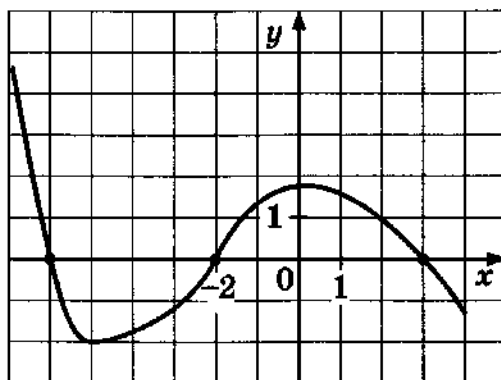


Рис. 48

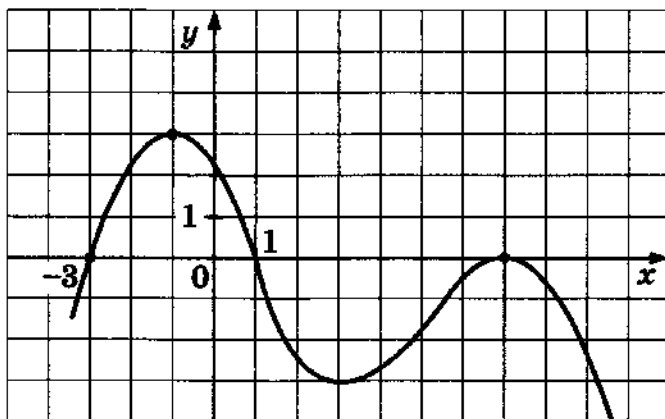


Рис. 49

2. Для каждой из функций задания 1 решите неравенства:

	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$
$y_1 = f(x)$				
$y_2 = f(x)$				

3. Найдите нули и точки перемены знака каждой из функций:

а) $f(x) = 5x(x + 7)(x - 2)$; в) $f(x) = 5x(x + 7)^6(x - 2)$;

б) $f(x) = 5x^2(x + 7)(x - 2)$; г) $f(x) = 5x(x + 7)(x - 2)^5$.

	а	б	в	г
Нули				
Точки перемены знака				

4. Для каждой из функций задания 3 решите неравенства:

	а	б	в	г
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				
$f(x) \geq 0$				
$f(x) \leq 0$				

5. Найдите нули и точки перемены знака каждой из функций:

а) $f(x) = (x^2 + 4)(x - 1)(x + 6)$; в) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 4)(x + 1)$;

б) $f(x) = (x^2 - 4)(x - 1)(x + 6)$; г) $f(x) = (x^2 - 9)(x - 3)^2(x + 7)$.

	а	б	в	г
Нули				
Точки перемены знака				

6. Для каждой из функций задания 5 решите неравенства:

	а	б	в	г
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				
$f(x) \geq 0$				
$f(x) \leq 0$				

7. Решите неравенства:

а) $x^2 - 9x < 0$;

в) $x^3 - 9x^2 < 0$.

б) $x^3 - 9x < 0$;

8*. Задайте какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа -5 ; 2 ; 101 и которая меняет знак только в точке 2 .

9*. Дана функция $f(x) = (x + 1)(x - b)(x + 3b)^4$. При каком значении параметра b число 6 является:

а) нулем данной функции;

б) точкой перемены знака для данной функции?

10*. Найдите нули и точки перемены знака функции $f(x) = (|x| - 3)(x + 5)|x - 6|$ и решите соответствующие неравенства:

Нули	Точки перемены знака	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$

С-22. Метод интервалов (2)

1. Решите неравенства:

а) $\frac{x+5}{x-3} < 0$;

в) $\frac{5x+2}{3x-1} > 0$;

б) $\frac{x+5}{x-3} \geq 0$;

г) $\frac{5x+2}{3x-1} \leq 0$.

2. Найдите области определения функций:

а) $y = \sqrt{(x+5)(x-3)}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x-5}{x+3}}$.

б) $y = \sqrt{\frac{x+5}{x-3}}$;

3. Даны неравенства, содержащие целые выражения (а-г), и неравенства, содержащие дробные рациональные выражения (1-6).

а) $(x-4)(x+4) < 0$;

1) $\frac{x^2(x+4)}{x-4} < 0$;

б) $(x+4)^2(x-4) < 0$;

2) $\frac{x+4}{x-4} < 0$;

в) $(x-4)^2(x+4) < 0$;

3) $\frac{x-4}{x+4} < 0$;

г) $x^2(x-4)(x+4) < 0$;

4) $\frac{(x+4)^2}{x-4} < 0$;

5) $\frac{x+4}{(x-4)^2} < 0$;

6) $\frac{x^2(x+4)^2}{x-4} < 0$.

Сопоставьте равносильные неравенства:

	а	б	в	г
Равносильные им среди 1–6				

4. Используя выражения $(x + 8)(x - 7)$; $\frac{x+8}{x-7}$; $\frac{x-7}{x+8}$ и знаки $>$; $<$; $\leq$; $\geq$, впишите в таблицу какое-нибудь неравенство, имеющее данный ответ:

Ответ	$(-8; 7)$	$[-8; 7)$	$(-8; 7]$	$(-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$	$(-\infty; -8] \cup (7; +\infty)$
Неравенство					

5. Решите неравенства:

а) $\frac{1}{x} > 1$;

в) $\frac{4}{x} > -2$.

б) $\frac{2}{x-3} \leq 1$;

6. Найдите и сравните между собой области определения функций:

$$y_1 = \sqrt{(x-9)(x+1)};$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{x-9}{x+1}};$$

$$y_3 = \sqrt{x-9} \cdot \sqrt{x+1};$$

$$y_4 = \frac{\sqrt{x-9}}{\sqrt{x+1}}.$$

7. Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $(x - 12)(x + 7) \leq 0$; в) $\frac{x - 12}{x + 7} \leq 0$;
 б) $(x - 12)(x + 7) < 0$; г) $\frac{x + 7}{x - 12} \leq 0$.

Неравенство	а	б	в	г
Наибольшее целое решение				
Наименьшее целое решение				

8*. При каком натуральном значении параметра a неравенству $\frac{x - a}{x - 3} \leq 0$ удовлетворяет ровно восемь целых чисел?

9*. При каком целом значении параметра a неравенству $\frac{x - a}{x - 3} \leq 0$ удовлетворяет ровно десять целых чисел?

10*. При каком целом значении параметра a неравенству $\frac{x^2 \cdot (x - a)}{x - 3} \leq 0$ удовлетворяет ровно десять целых чисел?

Поставьте рисунки и уравнения в соответствие.

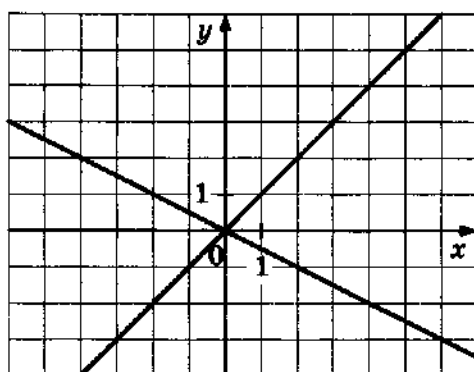


Рис. 50

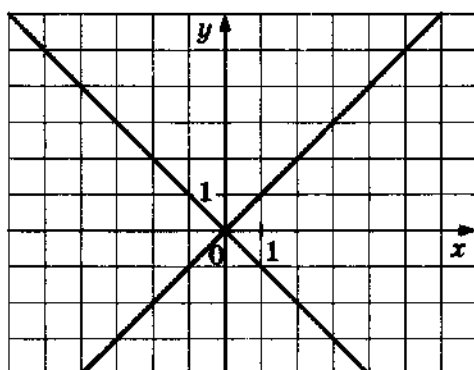


Рис. 51

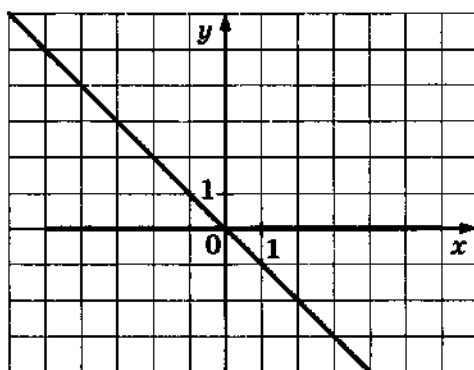


Рис. 52

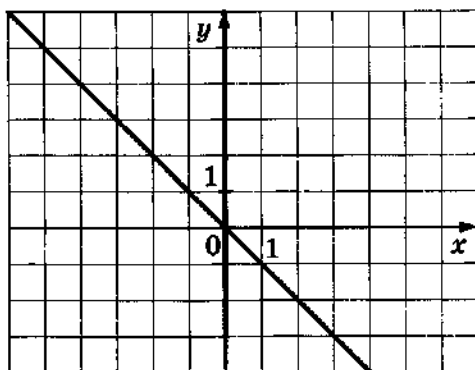


Рис. 53

Уравнение	а	б	в	г
Номер рисунка				

7*. При каком значении параметра b прямая $5x + by - 4 = 0$ пересекает ось ординат в точке:

- а) с положительной ординатой;
б) с ординатой, меньшей -8 ?

8*. Постройте графики каждого из уравнений:

- а) $xy = -1$; б) $(x + 2)(y - 1) = -1$.

9*. Постройте графики каждого из уравнений:

- а) $y - 0,5x^2 = 0$; б) $x - 0,5y^2 = 0$.**

10*. Найдите точку на графике уравнения $x^2 - 4x - y = 0$, сумма координат которой наименьшая.

С-24. Уравнение с двумя переменными и его график (2)

1. Какие из указанных точек $A(0; -10)$; $B(-6; -8)$; $C(10; 0)$; $D(9; 4)$; $N(2\sqrt{23}; -2\sqrt{2})$; $N(-\sqrt{87}; 2\sqrt{3})$; $O(0; 0)$ лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 100$?

2. Какие из данных уравнений являются уравнениями окружности:

- а) $(x + 5)^2 + (y - 2,3)^2 = 19$; г) $x^2 + y^2 = 5 + \sqrt{26}$;
 б) $3x^2 + 3y^2 = 12$; д) $x^2 + y^2 = 5 - \sqrt{26}$;
 в) $3x^2 + 2y^2 = 1$; е) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 98$?

3. Окружность задана уравнением $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Найдите:

- а) координаты центра окружности;
 б) радиус окружности;
 в) координаты точек окружности, лежащих на оси y ;
 г) координаты точек окружности, лежащих на оси x .

4. Выберите пары уравнений, графики которых совпадают :

- а) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$; 1) $2y + x - 3 = 0$;
 б) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 5$; 2) $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 35 = 0$;
 в) $7x + 14y = 21$; 3) $2y - x = 0$;
 г) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$. 4) $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$.

а	б	в	г

5. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением:

- а) $x^2 + y^2 - 8y = 9$; в) $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 35 = 0$.
 б) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

6*. При каком значении параметра b прямая $y = 4x + b$:

а) проходит через центр окружности $x^2 + y^2 = 16$;

б) проходит через центр окружности $(x + b)^2 + (y - 9)^2 = 11$?

7*. Найдите длину отрезка пересечения окружности $x^2 + y^2 = 100$ и прямой $11x - 13y = 0$.

8*. При каком значении параметра r окружность, заданная уравнением $(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = r^2$, не имеет общих точек с осями координат?

9*. Сколько общих точек имеют с окружностью $x^2 + y^2 = 10$ прямые:

а) $y = x$;

в) $y = 3 + x$;

б) $y = 2 + x$;

г) $y = 10 + x$?

10*. Как располагаются на координатной плоскости графики, заданные уравнениями? На каждом из рисунков нарисуйте несколько таких окружностей.

а) $(x - k)^2 + (y - 1)^2 = 9$;

в) $(x - k)^2 + (y - 1)^2 = k^2$;

б) $(x - k)^2 + (y - k)^2 = 9$;

г) $(x - k)^2 + (y - 1)^2 = k$.

С-25. Уравнение с двумя переменными и его график (3)*

1. Постройте график уравнения:

а) $\frac{3x + 2y - 6}{x} = 0$; в) $\frac{3x + 2y - 6}{x - y} = 0$.

б) $\frac{3x + 2y - 6}{y - 1} = 0$;

2. Используя график уравнения $x^2 + y^2 = 4$, постройте графики уравнений:

а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; в) $x = \sqrt{4 - y^2}$;

б) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; г) $x = -\sqrt{4 - y^2}$.

3. Используя график уравнения $x + y = 1$, постройте графики уравнений:

а) $|x| + y = 1$; в) $|x| + |y| = 1$.

б) $x + |y| = 1$;

4. Используя график уравнения $x \cdot y = 4$, постройте графики уравнений:

а) $(x + 1) \cdot y = 4$; в) $(x + 1) \cdot (y - 2) = 4$.

б) $x \cdot (y - 2) = 4$;

5. Используя график уравнения $(x + 1) \cdot (y - 2) = 4$, постройте графики уравнений:

а) $(|x| + 1) \cdot (y - 2) = 4$; в) $(|x| + 1) \cdot (|y| - 2) = 4$.

б) $(x + 1) \cdot (|y| - 2) = 4$;

6. Используя график уравнения $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, постройте графики уравнений:

а) $(|x| - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; в) $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 9$.

б) $(x - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 9$;

7. Используя график уравнения $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$, постройте графики уравнений:

а) $(|x| - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$; в) $(|x| - 5)^2 + (|y| + 1)^2 = 4$.

б) $(x - 5)^2 + (|y| + 1)^2 = 4$;

8. При каком значении параметра a графики уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $|x| + |y| = a$ имеют ровно четыре общие точки?

9. При каком значении параметра a графики уравнений $x^2 + y^2 = a$ и $|x| + |y| = 9$ имеют ровно восемь общих точек?

10. При каких значениях параметра a уравнение $x + a = \sqrt{8 - x^2}$ имеет ровно один корень?

С-26. Графический способ решения и исследования систем уравнений

1. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + 5y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x \cdot y = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -x^2 + 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x \cdot y = 81. \end{cases}$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

2. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} x \cdot y = -1, \\ x - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \cdot y = -1, \\ y = x^2 - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \cdot y = -1, \\ 6x + y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \cdot y = -1, \\ y = -x^2 - 4x - 4. \end{cases}$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

3. С помощью схематически изображенных графиков уравнений определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - y = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2, \\ (y - 5 + x)(y - 5 - x) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (y - 3)^2 = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = x^2, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$

Система	а	б	в	г
Количество решений				

4. Решите графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 4x - 3y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \cdot y = 5, \\ x + y = -6. \end{cases}$

5. Приведите какой-нибудь пример пары чисел $(a; b)$ так, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = ax + b \end{cases}$ имела число решений, указанное в таблице:

Количество решений	Ровно два решения	Ровно одно решение	Ноль решений
Пример пары чисел $(a; b;)$			

6*. Сделайте рисунки, на которых у графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) с окружностью $x^2 + y^2 = 25$:

- а) четыре общие точки; г) одна общая точка;
 б) три общие точки; д) нет общих точек.
 в) две общие точки;

7*. Приведите какой-нибудь пример тройки чисел $(a; b; c)$ ($a \neq 0$), таких, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ имела соответствующее количество решений, указанное в таблице.

Количество решений	Четыре решения	Три ре- шения	Два ре- шения	Одно решение	Ноль решений
Пример тройки чисел (a; b; c)					

8*. Сделайте рисунки, на которых у графика уравнения $(x - a)^2 + (x - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) с окружностью $x^2 + y^2 = 25$:

- а) две общие точки; в) нет общих точек.
б) одна общая точка;

9*. Приведите какой-нибудь пример тройки чисел (a; b; c) ($R > 0$), таких, чтобы система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases}$ имела соответствующее количество решений, указанное в таблице:

Количество решений	Два решения	Одно решение	Ноль решений	Более 13 решений
Пример тройки чи- сел (a; b; c)				

10*. Для каждого значения параметра b определите, сколько решений имеет система:

- а) $\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 4; \\ (x + 2)^2 + (y - b)^2 = 4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} ((x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 1) \cdot ((x + 2)^2 + y^2 - 4) = 0; \\ y = b. \end{cases}$

С-27. Решение систем уравнений второй степени

1. Решите системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7, \\ 6x - y = 13; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + 3xy = 13, \\ x - 4y = -15. \end{cases}$$

2. Решите системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x \cdot y = 4, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \cdot y = 4, \\ -x + y = 2. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$

4. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy - x = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x \cdot y = 25, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \cdot y = 20, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

6*. Найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x^3 - x^2 \cdot y = 0$ и $y^3 - 2x \cdot y^2 - 8 = 0$. В ответе запишите длины всех отрезков, концами которых служат найденные точки.

7*. Найдите точки пересечения графиков уравнений: $x^2 + 2xy + y^2 = 25$ и $x^2 - 5,5xy + 6y^2 = 0$.

В ответе дайте точку, сумма кубов координат которой наименьшая.

8*. Изобразите решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 7, \\ 9x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

в виде точек на координатной плоскости. В ответе дайте площадь четырёхугольника, вершинами которого являются эти точки.

9*. Найдите все пары чисел u и v , удовлетворяющие равенству $(u^2 - 3v)^{10} + (u^2 + 3v - 18)^8 = 0$.

10*. Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8(x^2 - 5x + 6)^2 + 5(y^2 - 2y - 15)^2 = 0, \\ 5x^2 - xy = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

С-28. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его периметр 56, а гипотенуза 25.

2. Найдите два натуральных числа, если известно, что сумма их квадратов на 16 больше их удвоенного произведения, а их среднее арифметическое равно 9.

3. Если в двузначном числе поменять местами цифры его десятичной записи, то разность квадратов начального и полученного двузначных чисел будет равна 693. Найдите эти числа.

4. Общее сопротивление электрической цепи при последовательном подключении вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = R_1 + R_2$, а при параллельном подключении — по формуле $\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Найдите каждое из двух сопротивлений, если при параллельном подключении общее сопротивление равно 8 Ом, а при последовательном 50 Ом.

5. Даны два круга. Площадь первого на 45π больше площади второго, а длина окружности первого круга на 6π больше длины окружности второго круга. Найдите радиусы этих кругов. (Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, площадь круга $S = \pi R^2$, где R — радиус круга.)

6. Банки «Лучший» и «Самый лучший» дают разные годовые проценты на вклад. Семен Семенович положил в банк «Лучший» 200 000 рублей, а Иван Иванович положил столько же в банк «Самый лучший». Через год у Ивана Ивановича было на 2000 рублей больше, чем у Семена Семеновича, а через два года больше на 4180 рублей. Сколько процентов годовых даёт каждый банк?

7. В предложенной на контрольной работе задаче на движение учащимся нужно было только составить уравнение или систему уравнений для решения этой задачи. Коля ввел два неизвестных, а Ваня одно. У Коли получилась система

$$\begin{cases} \frac{300}{v_1} + \frac{350}{v_2} = 10, \\ v_2 - v_1 = 10, \end{cases}$$

а у Вани уравнение $\frac{300}{v-10} + \frac{350}{v} = 10$.

а) Если Коля составил систему верно, верно ли составил уравнение Ваня?

б) Если Ваня составил уравнение неверно, верно ли составил систему Коля?

8. Проверая контрольные работы в классе, где учились Ваня и Коля (задание 7), учитель Леонид Исаакович в работе Тани увидел уравнение, относящееся к той же задаче:

$$\frac{350}{x+10} + \frac{300}{x} = 10, \text{ и поставил Тане за это задание «+». Что}$$

получат Ваня и Коля?

9. Попробуйте придумать задачу, которую решали (задание 7) Ваня и Коля, и решите её любым способом.

10. Мастер, работая один, выполняет всю работу на восемь дней быстрее, чем эту же работу выполняет в одиночку каждый из двух учеников. Мастер и два ученика, работая вместе, выполнили всю работу за четыре дня. Составьте систему и уравнение для решения этой задачи.

С-29. Неравенства с двумя неизвестными

1. Даны пары чисел:

- | | |
|----------------|-----------------------|
| а) $(-1; 6)$; | д) $(10; -10)$; |
| б) $(-3; 0)$; | е) $(0,123; 0,345)$; |
| в) $(0; 5)$; | ж) $(6,6; 9,9)$. |
| г) $(0; 0)$; | |

Для каждого из данных неравенств найдите все пары чисел, им удовлетворяющие:

Неравенство	Пары чисел
$3x + 2y - 10 < 0$	
$3x + 2y - 10 > 0$	
$3x + 2y - 10 \leq 0$	
$3x + 2y - 10 \geq 0$	

2. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| а) $x \geq 6$; | в) $y - 1 > 0$; |
| б) $x < -3$; | г) $y - 2 \leq 4$. |

3. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству: $3x + y \leq 6$.

4. Изобразите на координатной плоскости (для каждого пункта на отдельном рисунке) множество решений неравенства:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| а) $x + y \geq 0$; | в) $y - x - 1 > 0$; |
| б) $x + 2y < 0$; | г) $y + 2x \leq 5$. |

5. Найдите все такие значения a , при которых пара чисел $(a; 2 - 3a)$ удовлетворяет неравенству $5x - 4y + 13 \leq 0$.

С-30. Системы неравенств с двумя неизвестными

1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leq 3, \\ y \geq -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \leq 3, \\ y \leq 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x > 3, \\ y < -1. \end{cases}$

2. Поставьте в соответствие системы неравенств (а–г) и рисунки (54–58).

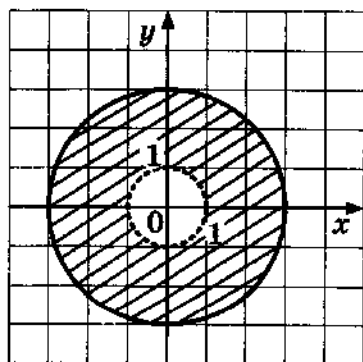


Рис. 54

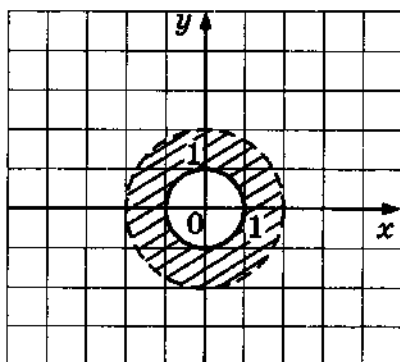


Рис. 55

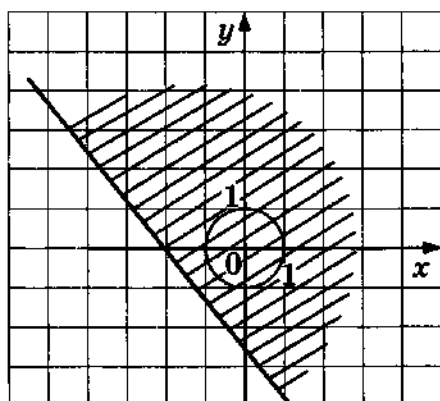


Рис. 56

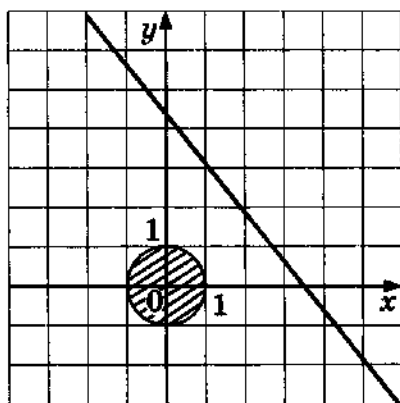


Рис. 57

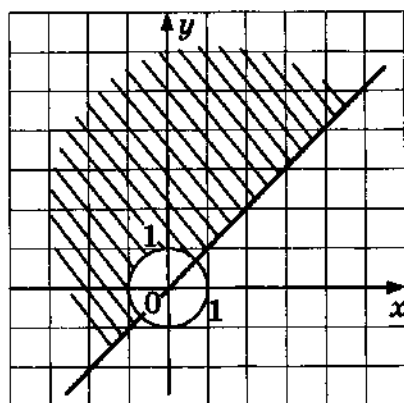


Рис. 58

а) $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y - 5 \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

Системы	а	б	в	г
Рисунки				

3. Покажите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$а) \begin{cases} x + y - 5 \leq 0, \\ x + y + 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \leq 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + y - 5 \leq 0, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x + y - 5 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0. \end{cases}$$

4. Какие из данных систем неравенств имеют бесконечное множество решений, для каких решение состоит из одной пары чисел, для каких решений нет?

$$а) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ x^2 - 4 \geq 1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 25; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ y^2 \geq 25; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 > 25; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Нет решений	Решение — одна пара чисел	Бесконечно много решений

5. Сколько пар целых чисел удовлетворяют системе неравенств:

$$а) \begin{cases} y \leq -x^2, \\ y \geq -4; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y \leq -x^2, \\ y > -4; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y < -x^2, \\ y \geq -4; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} y < -x^2, \\ y > -4? \end{cases}$$

6. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ y - x + 3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \leq 3, \\ y \geq -4, \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y \leq 0. \end{cases}$$

7*. Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} y \geq \sqrt{x}, \\ y \leq 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y \leq \sqrt{9 - x^2}, \\ y \geq -3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y \geq \sqrt{-x}, \\ y \leq x^2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} y \leq \sqrt{9 - x^2}, \\ y \geq x + 1. \end{cases}$$

8*. Пусть пара чисел $(a; b)$ является решением системы неравенств: $\begin{cases} y \geq x^2 - 1, \\ y \leq 6 - x^2. \end{cases}$

а) Какие значения может принимать число a ?

б) Какие значения может принимать число b ?

9*. При каком значении параметра a фигура, заданная множеством решений системы уравнения и неравенства, содержит отрезок длины 6?

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ 2x - 5y = a; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 25, \\ y = a \cdot x? \end{cases}$$

10*. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств: $\begin{cases} y - x^2 \geq -4, \\ y - x^2 \leq 3, \\ x^2 \leq 4. \end{cases}$

С-31. Последовательности

1. Какие из чисел 215; 243; 2,2222222; $\frac{1}{6}$; 217; 150; 2,222222; 55 скорее всего подходят в качестве шестого члена данных последовательностей (а-е)?

а) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$;

б) 5; 8; 13; 21; 34; ...;

в) 200; 190; 180; 170; 160; ...;

г) 2,2; 2,22; 2,222; 2,2222; 2,22222; ...;

д) 1; 3; 9; 27; 81; ...;

е) 2; 9; 28; 65; 126;

Последовательность	а	б	в	г	д	е
Шестой член						

2. Выписали подряд по порядку сто три первых члена последовательности: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{103}$.

а) Какие члены последовательности являются соседними с x_{41} ?

б) Какой член последовательности является предыдущим по отношению к x_{34} ?

в) Какой член последовательности является последующим по отношению к x_{98} ?

г) Сколько членов находится между x_{56} и x_{101} ?

д) Сколько выписано членов с четными номерами?

3. Найдите шестые члены каждой из заданных последовательностей:

а) $b_n = \frac{n}{n+5}$;

г) $x_n = \frac{2^n}{64}$;

б) $p_n = n^2 - 3n$;

д) $l_n = (-1)^n n$;

в) $a_n = -7n + 5$;

е) $y_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{19}$.

4. Выпишите второй, третий и четвертый члены последовательностей, заданных рекуррентным соотношением:

а) $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 2$;

в) $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

б) $b_1 = 2$; $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$;

5. Сколько отрицательных членов у каждой из заданных последовательностей:

а) $b_n = \frac{n-8}{n+7}$;

в) $a_n = 11n - 90$;

б) $a_n = 9n - 6$;

г) $p_n = 10n - n^2$?

6. Дана последовательность $b_n = \frac{n-1}{n}$.

а) Найдите b_{n+1} .

б) Вычислите: $b_{n+1} \cdot b_n$.

в) Используя результат пункта б), докажите, что каждый последующий член последовательности больше предыдущего.

7. Выпишите последовательность последних цифр в десятичной записи шести чисел, являющихся кубами последовательных натуральных чисел, начиная с 1, и найдите сумму всех шести членов этой последовательности.

8*. Пусть последовательность задана формулой $c_n = \frac{n^2}{n+4}$. Задайте формулой последовательность, состоящую из:

- а) всех членов данной последовательности c_n с нечетными номерами;
- б) всех членов данной последовательности c_n , начиная с c_4 .

9*. Сколько среди членов последовательности $x_n = 1 + \frac{30}{n+2}$ целых чисел?

10*. Найдите наибольший член каждой из последовательностей:

а) $p_n = 15 - 2n$;

в) $a_n = 10n - n^2$;

б) $b_n = \frac{19n+1}{n}$;

г) $a_n = 23n - 2n^2$.

С-32. Арифметическая прогрессия

1. Вставьте на пропущенные места такие числа, чтобы полученные четыре числа, взятые в данном порядке, были последовательными членами арифметической прогрессии.

а) $2; 8; _ ; _$.

в) $2; _ ; _ ; 8$.

б) $2; _ ; 8; _$.

г) $_ ; _ ; 2; 8$.

2. Напишите формулу n -го члена арифметической прогрессии и найдите ее девятый член, если:

а) $a_1 = 3; d = 4$;

в) $a_1 = 5; d = -2$;

б) $a_1 = -27; d = 7$;

г) $a_1 = d = 0$.

3. Арифметическая прогрессия задана формулой

$$a_n = 3n - 11. \text{ Найдите:}$$

а) a_1 ;

г) $a_{156} - a_{158}$;

б) d ;

д) $\frac{a_{18} + a_{20}}{2} - a_{17}$.

в) $a_{132} - a_{131}$;

(Ответы желательно найти устно.)

4. Арифметическая прогрессия задана формулой

$$a_n = 61 - 5n. \text{ Найдите:}$$

а) сколько в этой прогрессии положительных членов;

б) наибольший из отрицательных членов прогрессии;

в) каким членом в этой прогрессии является число -144 .

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

а) $x_{53} = 240; x_{55} = 260$;

б) $\begin{cases} a_8 - a_7 = 2; \\ a_9 + a_{10} = 48. \end{cases}$

6. Найдите все значения p , при которых числа p^2 ; $p + 7$; $7p$, взятые в данном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

7. На прямой $2x + 3y - 10 = 0$ взяты точки A_1 ; A_2 ; ...; A_n , абсциссы которых составляют соответственно арифметическую прогрессию, заданную формулой $a_n = 5 + 9n$. Найдите формулу для вычисления ординат этих точек.

8. Напишите формулу всех натуральных чисел, которые:

- а) делятся без остатка на 8;
- б) при делении на 9 дают в остатке 4;
- в) в десятичной записи имеют последнюю цифру 7;
- г)* имеют сумму всех цифр в десятичной записи, делящуюся на 3.

9*. Дано сто первых членов арифметической прогрессии

$$a_n = 3 + \frac{7}{11}n. \text{ Сколько среди них целых чисел?}$$

10*. Первый член арифметической прогрессии равен 30, а произведение ее 40 первых членов равно 0. Сколько различных значений может быть у разности этой прогрессии?

С-33. Сумма арифметической прогрессии

1. Найдите сумму первых 10 членов каждой из заданных арифметических прогрессий:

а) $x_n = 5 + 3n$;

в) $b_n = -13 + 4n$;

б) $a_n = 51 - 4n$;

г) $c_n = -6,7$.

2. Найдите сумму первых n членов арифметических прогрессий:

а) $2 + 8 + 14 + 20 + \dots$;

в) $12 + 6 + 0 + (-6) + \dots$;

б) $15 + 13 + 11 + 9 + \dots$;

г) $6 + 6 + 6 + 6 + \dots$.

3. Найдите сумму первых n членов арифметических прогрессий:

а) $y_n = 3 + 5n$;

в) $a_n = 4 - 22n$.

б) $b_n = 11n - 43$;

4. Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 42$; $a_{20} = -32$;

в) $a_{10} + a_{11} = 11$;

б) $a_2 = 72$; $a_{19} = -80$;

г) $a_{14} = a_{17} = 3$.

(Постарайтесь сделать это «в одну строчку».)

5. Найдите среднее арифметическое первых n членов арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $x_n = 11 + 5,5n$;

б) $b_n = 0,2 + 0,8n$.

6. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

а) $a_{10} = 30$; $S_{10} = 75$;

в) $S_{100} - S_{99} = 18$; $a_{99} = 12$.

б) $S_{10} = 75$; $S_9 = 45$;

7. Найдите формулу для вычисления суммы:

а) первых n натуральных чисел ($1 + 2 + 3 + \dots + n$);

б) первых n натуральных чисел вида $11n - 4$.

$(7 + 18 + 29 + \dots + (11n - 4))$;

в) Первых 100 натуральных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 7.

8. Найдите n , если

а) $a_n = 3n - 2$; $S_n = 590$; б) $a_n = 2n - 10$; $S_n = -14$.

9. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 4n - 5$. Найдите суммы вида:

а) $a_1 + a_3 + \dots + a_{37}$; б) $a_{13} + a_{16} + \dots + a_{37} + a_{38}$.

10*. Докажите, что:

а) сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле $S_n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n$;

б) последовательность, заданная формулой $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$, может быть рассмотрена как последовательность сумм n , первых членов арифметической прогрессии, у которой $x_1 = a + b$; $d = 2a$.

С-34. Геометрическая прогрессия

1. Вставьте на пропущенные места такие положительные числа, чтобы полученные четыре числа, взятые в данном порядке, были последовательными членами геометрической прогрессии.

а) 4; 16; _; _.

в) 4; _; _; 16.

б) 4; _; 16; _.

г) _; _; 4; 16.

2. Напишите формулу n -го члена геометрической прогрессии и найдите ее шестой член, если:

а) $b_1 = 3$; $q = 2$;

в) $b_1 = 11$; $q = -1$;

б) $b_1 = -3$; $q = -2$;

г) $b_1 = q = 1$.

3. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 2 \cdot 3^n$. Найдите:

а) a_1 ;

г) $a_{152} : a_{154}$;

б) q ;

д) $\frac{a_{31} \cdot a_{33}}{a_{32}^2}$.

в) $a_{134} : a_{133}$;

(Ответы желательно найти устно.)

4. Геометрическая прогрессия задана формулой

$a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Найдите:

а) сколько в этой прогрессии членов, являющихся целыми числами;

б) наибольший из нецелых членов прогрессии;

в) каким членом в этой прогрессии является число 3^{-348} ?

5. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

а) $x_{10} = 5 \cdot 3^9$ и $x_{12} = 5 \cdot 3^{11}$;

б) $x_{10} = 3 \cdot 2^{11}$ и $x_{12} = 3 \cdot 2^{13}$;

в) $\begin{cases} a_{10} : a_9 = 5; \\ a_6 + a_7 = 5^{12}. \end{cases}$

6. Найдите все значения p , при которых числа $p + 8$; $p + 2$; p , взятые в данном порядке, являются последовательными членами геометрической прогрессии.

7. На прямой $5x - 3y = 0$ взяты точки $A_1; A_2; \dots; A_n$, абсциссы которых составляют соответственно геометрическую прогрессию, заданную формулой $a_n = 6 \cdot 10^n$. Найдите формулу для вычисления ординат этих точек.

8. Банк дает вкладчику 4% годовых. Запишите формулу для вычисления вклада через n лет, если первоначальный взнос был p рублей.

9. Количество вещества в растворе каждый день уменьшается на 4%. Запишите формулу для вычисления количества вещества через n дней, если первоначальное количество вещества p .

10*. Напишите формулу для вычисления произведения первых n членов геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, если $b_1 = 3$.

С-35. Сумма геометрической прогрессии

1. Найдите суммы (S_6) пяти первых членов каждой из геометрических прогрессий:

а) $b_1 = -1$; $q = 2$;

г) $c_1 = 64$; $q = \frac{1}{2}$;

б) $a_1 = 1$; $q = 3$;

д) $b_1 = 10$; $q = -1$;

в) $x_1 = -2$; $q = -3$;

е) $x_1 = -5$; $q = 1$.

2. Распределите способы нахождения сумм в задании 1 по оптимальным, на ваш взгляд, способам вычисления:

По формуле в виде $S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$	По формуле в виде $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$	По формуле в виде $S_n = b_1 \cdot n$	Устно без формул

3. Какие из следующих утверждений являются верными для любой геометрической прогрессии?

а) Сумма любых двух членов геометрической прогрессии с нечетными номерами есть отрицательное число.

б) Произведение любых двух членов геометрической прогрессии с четными номерами есть положительное число.

в) Если два первых члена геометрической прогрессии отрицательны, то и все члены этой прогрессии отрицательны.

г) Если два первых члена геометрической прогрессии меньше единицы, то и все члены этой прогрессии меньше единицы.

д) Если знаменатель прогрессии — дробное число, то и сумма любых n первых членов прогрессии — дробное число.

е) Сумма первых 43 членов геометрической прогрессии не может быть равной нулю.

ж) Сумма первых 34 членов геометрической прогрессии не может быть равной нулю.

з) Если $a^2 = b \cdot c$, то числа b ; a ; c являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

и) Если числа b ; a ; c являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, то $a^2 = b \cdot c$.

к) Если $q > 1$, то $b_n < b_{n+1}$.

4. Запишите сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_1 = 6$; $q = 3$;

г) $b_1 = 6$; $q = -1$;

б) $b_1 = 6$; $q = \frac{1}{3}$;

д) $b_1 = 6$; $q = 1$.

в) $b_1 = 6$; $q = -\frac{1}{3}$;

5. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_n = 5$; $q = 3$;

в) $b_n = 6$; $q = -1$;

б) $b_n = 4$; $q = \frac{1}{2}$;

г) $b_n = 11$; $q = 1$.

6. Дана геометрическая прогрессия $b_1 = 4$, $q = 2$.

а) Найдите $\frac{S_{15} - S_{14}}{S_{14} - S_{13}}$.

б) Запишите формулу для нахождения суммы квадратов n первых членов этой прогрессии.

в) Запишите формулу суммы первых 16 членов этой прогрессии с четными номерами.

7. Вычислите:

а) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} - 2^{11}$;

б) $1 - 2 + 4 - 8 + \dots - 2^{15} + \frac{1}{3} \cdot 2^{16}$.

8*. В геометрической прогрессии сумма первых 19 членов с четными номерами в 7 раз больше суммы первых 19 членов с нечетными номерами. Найдите знаменатель этой прогрессии.

9*. Найдите сумму:

а) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}$ (при $x \neq -1$);

б) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots + 2^{n-1} x^{n-1}$ ($x \neq 0,5$);

в) $1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64} + \dots + \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ ($x \neq 4$).

10*. Найдите наименьшее положительное значение первого члена прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{4}$, при котором сумма четырех первых членов этой прогрессии — натуральное число.

С-36. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Докажите, что последовательность, все члены которой равны 8, является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией.

2. Сумма 26 первых членов последовательности равна 78. Найдите девятый член этой последовательности, если она является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией.

3. В геометрической прогрессии $b_1; b_2; b_3; \dots; b_{33}$. $b_1 \neq b_2$. Члены с нечетными номерами образуют арифметическую прогрессию $b_1; b_3; b_5; \dots; b_{31}; b_{33}$, сумма которой $S_{17} = -170$. Найдите сумму (S_{33}) данной геометрической прогрессии.

4. Второй, пятый и пятнадцатый члены арифметической прогрессии являются соответственно первыми тремя членами геометрической прогрессии. Найдите эти три числа, если их сумма равна 21.

5. Даны три первых члена арифметической прогрессии: $a; a + d; a + 2d$. Найдите $\frac{a_1}{d}$, если числа $a; a + d; \frac{9}{8}(a + 2d)$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

6. Даны арифметическая прогрессия a_n , у которой $a_1 = 3$, $d = 5$ и последовательность $b_n = 2^{a_n}$.

а) Найдите b_1 и b_2 .

б) Найдите $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ и докажите, что последовательность

$b_n = 2^{a_n}$ является геометрической прогрессией.

в) Вычислите $\sqrt[255]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{10}}$.

7*. Дана последовательность $b_n = 3^n - 4n$. Напишите формулу суммы ее первых n членов.

8*. Найдите сумму $3 + 33 + 333 + 3333 + \dots + \underset{n \text{ раз}}{333\dots 3}$.

9*. Докажите, что среди всех членов арифметической прогрессии a_n , где $a_1 = 0$; $d = 4$, есть десять чисел, являющихся последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

10*. Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 2$; $d = 3$. Существуют ли какие-либо три члена этой прогрессии, являющиеся тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии? Если нет, то почему, если да, то приведите пример.

С-37. Примеры комбинаторных задач. Перестановки

1. У Феди четыре разных конверта и шесть различных марок одного достоинства. Сколькими способами он может выбрать конверт и наклеить на него марку?

2. У Юрия Михайловича четыре шляпы, три кепки и одна тюбетейка. Сколькими способами он может выбрать головной убор?

3. Сколькими способами число 3^{23} можно представить в виде произведения двух натуральных сомножителей? ($5^5 \cdot 5^{18}$ и $5^{18} \cdot 5^5$ считать за один способ.)

4. Вычислите:

а) $4!$;

$$\text{г) } \frac{24!}{25!};$$

б) $5!$;

$$\text{д) } \frac{99! - 98!}{99! + 98!}.$$

в) $8! - 1!$;

5. Сколькими способами можно переставить буквы в фамилии Миндюк?

6. Рассматриваются все различные четырехзначные числа, в десятичной записи которых используются по одному разу цифры 1; 5; 6; 8.

а) Сколько таких чисел?

б) Сколько среди таких чисел делятся на 5?

7. На пятиместную скамейку садятся Вася, Дима, Света, Сергей и Фекла.

а) Сколькими способами они могут расположиться на скамейке? (например: Вася, Фекла, Дима, Света, Сергей)

б) Скольким способами они могут сесть на скамейку так, чтобы девочки сидели рядом? (например: Вася, Дима, Фекла, Света, Сергей)

в) Сколькими способами они могут сесть на скамейку так, чтобы девочки не сидели рядом? (например: Фекла, Вася, Дима, Света, Сергей)

8. Сколько нулей стоит в конце десятичной записи числа:

а) 30^6 ;

в) $686!$?

б) $15!$;

9. Сколькими способами можно переставить буквы в фамилии Суворова?

10*. Дима носит в школу шесть разноцветных карандашей. Сколько различных наборов карандашей может оказаться у Димы на уроке, если он мог по дороге часть карандашей или даже все потерять?

С-38. Размещения и сочетания

1. Используя формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ и $C_n^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

вычислите:

а) A_7^4 ;

г) $\frac{C_{17}^8}{C_{17}^9}$;

б) $\frac{A_{46}^{11}}{A_{45}^{10}}$;

д) $\frac{A_5^3}{C_5^3}$.

в) C_{21}^{19} ;

2. В 9 классе «А» 25 человек. Среди них распределяются три доклада: «Теорема Виета и ее автор Франсуа Виет», «Кривые второго порядка на координатной плоскости» и «Что такое математическая статистика». Сколькими способами можно выбрать докладчиков?

3. В 9 классе «Б» 24 человека. Сколькими способами можно выбрать двоих для сегодняшнего дежурства?

4. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в десятичной записи которых используются:

а) по одному разу цифры 2; 3; 5; 7; 8; 9;

б) по одному разу цифры 0; 3; 5; 7; 8; 9?

5. В 9 «Б» 11 девочек и 13 мальчиков. Надо сформировать группу из двух мальчиков и двух девочек. Сколькими способами можно сформировать группу?

6. Среди 35 различных изделий ровно 6 бракованных. Сколькими способами можно отобрать 16 изделий, среди которых ровно 2 бракованных? (В ответе можно записать только формулу без вычислений.)

7. Из 23 человек формируются три бригады по 9, 7 и 7 человек соответственно. Сколькими способами можно сформировать эти бригады? (В ответе можно записать только формулу без вычислений.)

8. Придумайте задачу, ответом которой служит число:

а) A_{22}^{20} ;

б) $C_{24}^{22} \cdot C_4^3$.

9. Матч между командами 9 «А» и 9 «Б» закончился со счетом 2:4. Сколькими способами могут распределиться голы, забитые в ворота каждой из команд? (например: А; Б; А; А; А; Б).

10*. 16 параллельных прямых пересечены другими 22 параллельными прямыми. Сколько получилось параллелограммов?

С-39. Начальные сведения по теории вероятностей

1. Какие из данных предложений являются верными?

- а) Если игральную кость бросить 120 000 раз, то 5 очков выпадет приблизительно 20 000 раз.
- б) Если монету бросить 12 раз, то ровно 6 раз выпадет решка, и ровно 6 раз выпадет орел.
- в) При бросании монеты 200 раз вероятность того, что герб выпадет ровно 100 раз, равна 0,5.
- г) При бросании игральной кости 1000 раз вероятность того, что число 2 не выпадет ни разу, близка к 0.
- д) При бросании игральной кости 1000 раз вероятность того, что 5 очков не выпадет ни разу, равна 0.
- е) В коробке лежат 72 карандаша двух цветов: красного и синего. Вероятность того, что вытащенный из коробки карандаш будет синим, равна 0,5.
- ж) В коробке лежат 72 карандаша двух цветов: красного и синего. Если известно, что вероятность того, что вытащенный из коробки карандаш будет синим, равна 0,25, то в коробке 54 красных карандаша.

2. Бросается игральная кость. Определите вероятность того, что:

- а) выпадет три очка;
- б) выпадет более трех очков;
- в) выпадет менее трех очков;
- г) выпадет не более трех очков;
- д) выпадет не менее трех очков;
- е) выпадет любое число очков, кроме трех.

Результаты занесите в таблицу:

Результат опыта	а	б	в	г	д	е
Вероятность						

3. В коробке 6 синих и 6 красных карандашей. Какова вероятность, что все вытянутые карандаши синие, если:

- а) вытянули один карандаш;
- б) вытянули два карандаша;
- в) вытянули три карандаша?

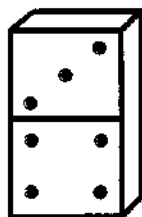
4. Вася записал у себя в тетради натуральное однозначное число. Затем Дима записал у себя тоже однозначное натуральное число. Какова вероятность того, что Дима записал:

- а) то же число, что и Василий;
- б) отличное от числа записанного Василием?

5. Коля нашел бракованную игральную кость, на которой не было грани с пятью очками, зато было две грани с двумя очками. Какова вероятность того, что при бросании такой кости выпадет:

- а) наименьшее простое число;
- б) четное число очков;
- в) нечетное число очков;
- г) число очков, отличное от 5?

6. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной наугад фишке домино равна 7? (Фишка домино выглядит так: очки от 0 (пусто) до 6; всего 28 фишек.)



7. В личном шахматном турнире участвуют семь шахматистов из России и пять шахматистов из Украины. Проведена жеребьевка, после которой начались шесть игр. Какова вероятность того, что российский шахматист Кузнецов будет играть:

- а) с шахматистом из Украины;
- б) с шахматистом из России?

8*. Дима, Петя, Вася, Коля и Артем сели в ряд на скамейку. Какова вероятность того, что:

- а) Петя будет сидеть ровно в середине;
- б) между Колей и Артемом будут сидеть ровно два мальчика;
- в) Дима будет сидеть рядом с Петром;
- г) Дима будет сидеть рядом с Петром, причем слева от него;
- д) Дима будет сидеть слева от Петра, но не обязательно рядом с ним;
- е) Дима и Петр не будут сидеть рядом?

9*. Радиусы двух окружностей 12 и 17, а расстояние между центрами выбирается произвольно (равновероятно) из чисел: 3; 5; 7; 10; 12; 29; 30. Какова вероятность того, что окружности:

- а) имеют одну общую точку;
- б) имеют ровно две общие точки;
- в) не имеют общих точек;
- г) совпадают?

10*. Электропоезда Топольград–Березовск ходят каждый час: в 5 часов, 6 часов и т.д., а электропоезда Топольград–Кленовск с той же платформы ходят также каждый час: в 5 часов 45 минут, в 6 часов 45 минут и т.д. Дима приходит на эту платформу и садится на первый из пришедших поездов. Какова вероятность того, что Дима сядет на поезд до Кленовска?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1. Квадратный трехчлен

Подготовительный вариант

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 5x - 24$; б) $-3x^2 - x + 14$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + 3x$; г) $3x^2 + x - 14$;
б) $8x^2 - 2$; д) $9x^2 + 3x - 42$;
в) $x^2 - 5x - 24$; е) $-x^2 - 3x + 4$.

3. Сократите дробь: $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(x - 3)^2 + 1$; б) $4x^2 + 4x - 1$.

5. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-3(x + 1)^2 + 5$; б) $-x^2 + 6x$.

Дополнительное задание

6*. При каких b квадратный трехчлен $x^2 - 4x + b$ можно разложить на линейные множители?

ВАРИАНТ 1

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 4x - 21$; б) $-4x^2 + x + 18$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $3x^2 - 5x$; г) $4x^2 - x - 18$;
б) $27x^2 - 3$; д) $14x^2 - 7x - 42$;
в) $x^2 - 4x - 21$; е) $-x^2 - 4x + 5$;

3. Сократите дробь: $\frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 2x + 1}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(x + 2)^2 - 3$;

б) $9x^2 - 6x - 1$.

5. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-2(x - 3)^2 + 4$;

б) $-x^2 + 8x$.

Дополнительное задание

6*. При каких b квадратный трехчлен $x^2 - 6x + b$ можно разложить на линейные множители?

ВАРИАНТ 2

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 3x - 10$;

б) $-2x^2 + x + 15$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $4x^2 + x$;

г) $2x^2 - x - 15$;

б) $12x^2 - 3$;

д) $8x^2 + 4x - 12$;

в) $x^2 - 3x - 10$;

е) $-x^2 - 5x + 6$.

3. Сократите дробь: $\frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 6x + 9}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(x - 4)^2 - 5$;

б) $x^2 + x - 3$.

5. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-4(x + 2)^2 - 3$;

б) $-x^2 + 2x$.

Дополнительное задание

6*. При каких b квадратный трехчлен $x^2 - 2x + b$ можно разложить на линейные множители?

К-2. Основные свойства квадратичной функции

Подготовительный вариант

1. Найдите нули функции:

а) $y = x^2 - 6x - 16$;

б) $y = x^2 - 3x + 7$.

2. Дана функция $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Не строя график, найдите:

а) координаты точек пересечения графика с осью абсцисс;

б) координаты точек пересечения графика с осью ординат;

в) координаты точек пересечения графика с прямой

$y = 2x - 5$;

г) наименьшее значение функции.

3. Напишите промежутки возрастания и убывания функции $y = -3x^2$.

4. Постройте в одной системе координат графики функций:

$y = x^2$,

$y = x^2 - 1$,

$y = (x - 1)^2$.

Дополнительное задание

5*. При каких значениях k графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + k$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют более двух общих точек?

ВАРИАНТ 1

1. Найдите нули функции:

а) $y = x^2 - 6x - 27$;

б) $y = x^2 - 5x + 8$.

2. Дана функция $f(x) = 4 + 3x - x^2$. Не строя график, найдите:

а) координаты точек пересечения графика с осью абсцисс;

б) координаты точек пересечения графика с осью ординат;

в) координаты точек пересечения графика с прямой

$y = 3x + 4$;

г) наибольшее значение функции.

3. Напишите промежутки возрастания и убывания функции $y = -2x^2 + 3$.

4. Постройте в одной системе координат графики функций:

$y = -x^2$,

$y = -x^2 + 1$,

$y = -(x + 1)^2$.

Дополнительное задание

5*. При каких значениях k графики функций $y = -x^2$ и $y = 4x + k$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют более двух общих точек?

ВАРИАНТ 2

1. Найдите нули функции:

а) $y = x^2 - 7x - 18$;

б) $y = x^2 - 5x + 6$.

2. Дана функция $f(x) = 6 - 5x - x^2$. Не строя график, найдите:

- а) координаты точек пересечения графика с осью абсцисс;
- б) координаты точек пересечения графика с осью ординат;
- в) координаты точек пересечения графика с прямой $y = 5x + 6$;
- г) наибольшее значение функции.

3. Напишите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^2 - 1$.

4. Постройте в одной системе координат графики функций:

$$y = 2x^2, \quad y = 2x^2 - 8, \quad y = 2(x - 1)^2.$$

Дополнительное задание

5*. При каких значениях k графики функций $y = 2x^2$ и $y = 4x + k$:

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют более двух общих точек?

К-3. Корни n -й степени. Степень с рациональным показателем

Подготовительный вариант

1. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{(-32)} + \sqrt{25}$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{13}{7}}$;
- б) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$; д) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$;
- в) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$; е) $(\sqrt[3]{-3})^6 + \sqrt[6]{(-3)^{12}}$.

2. Упростите выражение:

$$\left(\frac{m - n}{m + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}} + \frac{m + 2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}} + n}{m + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}} \right)^{-3}.$$

3. При каких значениях x определено выражение

$$3x^{\frac{1}{2}} + (2 - x)^{-\frac{1}{3}}?$$

Дополнительное задание

4*. Постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ и укажите абсциссы точек первого графика, расположенных выше точек второго.

ВАРИАНТ 1

1. Вычислите:

- а) $\sqrt{36} - \sqrt[3]{(-27)} + \sqrt[3]{64}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{1\frac{5}{8}}$;
 б) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$; д) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$;
 в) $\sqrt[3]{\sqrt{8}-4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{8}+4}$; е) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^{12} + \sqrt[4]{(-2)^8}$.

2. Упростите выражение:

$$\left(\frac{x - 4y}{x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} + \frac{x - 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 4y}{x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2}.$$

3. При каких значениях x определено выражение

$$2(x+1)^{\frac{1}{2}} + (3-x)^{\frac{1}{3}}?$$

Дополнительное задание

4*. Постройте графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$ и укажите абсциссы точек первого графика, расположенных выше точек второго.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислите:

- а) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[7]{(-128)} + \sqrt{49}$; б) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \sqrt[3]{\sqrt{17}-9} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+9}; & \text{г)} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{9}} \cdot \left(1\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{9}}; \\ \text{д)} \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}; & \text{е)} \left(\sqrt[5]{-5}\right)^{10} + \sqrt[3]{(-2)^{16}}. \end{array}$$

2. Упростите выражение:

$$\left(\frac{4u-9v}{4u-6u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}} + \frac{4u-12u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}+9v}{4u-6u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}} \right)^{-4}.$$

3. При каких значениях x определено выражение

$$4(x+3)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{-\frac{1}{2}}?$$

Дополнительное задание

4*. Постройте графики функций $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{5}}$ и укажите абсциссы точек первого графика, расположенных выше точек второго.

К-4. Квадратные неравенства и системы неравенств

Подготовительный вариант

1. Решите неравенство:

а) $x^2 - 4x - 5 < 0$;

г) $x^2 + 6x + 19 < 0$;

б) $x^2 \geq 16$;

д) $x^2 + 6x + 19 > 0$;

в) $3x^2 < x$;

е) $2x^2 + x - 8 \geq 0$.

2. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x$. Найдите, при каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

д) $f(x) > -1$;

б) $f(x) \geq 0$;

е) $f(x) \geq -1$;

в) $f(x) < 0$;

ж) $f(x) < -1$;

г) $f(x) \leq 0$;

з) $f(x) \leq -1$.

3. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x > -2; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

4*. При каких значениях b определено выражение

$$\sqrt{100 - b^2} + \frac{1}{\sqrt{(b+1)(b-3)}}?$$

Дополнительное задание

5*. При каких значениях параметра a уравнение

$$3x^2 + ax + a - 3 = 0 \text{ имеет два различных корня?}$$

ВАРИАНТ 1

1. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x - 4 < 0$;

г) $x^2 + 4x + 14 < 0$;

б) $x^2 \leq 9$;

д) $x^2 + 4x + 14 > 0$;

в) $2x^2 > 3x$;

е)* $3x^2 + x - 3 \geq 0$.

2. Дана функция $f(x) = 4x - x^2$. Найдите, при каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

д) $f(x) > 4$;

б) $f(x) \geq 0$;

е) $f(x) \geq 4$;

в) $f(x) < 0$;

ж) $f(x) < 4$;

г) $f(x) \leq 0$;

з) $f(x) \leq 4$.

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x > -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x \geq 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}$

4*. При каких значениях b определено выражение

$$\sqrt{81 - b^2} + \frac{1}{\sqrt{(b-1)(b+4)}} ?$$

*Дополнительное задание*5*. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 + ax + a - 2 = 0$$
 имеет два различных корня?

ВАРИАНТ 2

1. Решите неравенство:

а) $x^2 - 5x - 6 > 0$;

г) $x^2 + 2x + 12 < 0$;

б) $x^2 \geq 25$;

д) $x^2 + 2x + 12 > 0$;

в) $4x^2 < x$;

е)* $2x^2 + 2x - 1 \leq 0$.

2. Дана функция $f(x) = 6x - x^2$. Найдите, при каких значениях x :

- | | |
|--------------------|--------------------|
| а) $f(x) > 0$; | д) $f(x) > 9$; |
| б) $f(x) \geq 0$; | е) $f(x) \geq 9$; |
| в) $f(x) < 0$; | ж) $f(x) < 9$; |
| г) $f(x) \leq 0$; | з) $f(x) \leq 9$. |

3. Решите систему неравенств:

- | | |
|---|--|
| а) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1,5; \end{cases}$ | в) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geq 7; \end{cases}$ |
| б) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ | г) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x \geq 6. \end{cases}$ |

4*. При каких значениях b определено выражение

$$\sqrt{121 - b^2} + \frac{1}{\sqrt{(b+2)(b-5)}} ?$$

Дополнительное задание

5*. При каких значениях параметра a уравнение

$$4x^2 + ax + a - 4 = 0 \text{ имеет два различных корня?}$$

К-5. Метод интервалов**Подготовительный вариант**

1. Решите неравенство методом интервалов:

а) $x(x-1)(x+2) < 0$;

б) $\frac{x+3}{x-5} \geq 0$.

2. Пусть $f(x) = x^2(x-1)$. При каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

в) $f(x) < 0$;

б) $f(x) \geq 0$;

г) $f(x) \leq 0$?

3. Пусть $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x-5}$. При каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

в) $f(x) < 0$;

б) $f(x) \geq 0$;

г) $f(x) \leq 0$?

4. При каких значениях b определено выражение

$$\sqrt{\frac{b^2-4}{b}}?$$

5*. Решите неравенство: $\frac{3}{x} < 1$.

Дополнительные задания

6*. Решите неравенство:

$$(x^2 - 3x - 1)^2 \geq (x^2 + 7x + 1)^2.$$

7*. Для каждого a решите неравенство: $\frac{x-a}{x-1} \leq 0$.

ВАРИАНТ 1

1. Решите неравенство методом интервалов:

а) $x(x - 2)(x + 3) > 0$;

б) $\frac{x - 2}{x + 3} \leq 0$.

2. Пусть $f(x) = x(x + 2)^2$. При каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

в) $f(x) < 0$;

б) $f(x) \geq 0$;

г) $f(x) \leq 0$?

3. Пусть $f(x) = \frac{x^2(x + 3)}{x - 4}$. При каких значениях x :

а) $f(x) > 0$;

в) $f(x) < 0$;

б) $f(x) \geq 0$;

г) $f(x) \leq 0$?

4. При каких значениях b определено выражение

$$\sqrt{\frac{b^2 - 9}{b}}?$$

5*. Решите неравенство: $\frac{2}{x} < 3$.

Дополнительные задания

6*. Решите неравенство:

$$(x^2 + 2x - 2)^2 \geq (x^2 - 5x + 2)^2.$$

7*. Для каждого a решите неравенство: $\frac{x + a}{x + 2} \geq 0$.

ВАРИАНТ 2

1. Решите неравенство методом интервалов:

а) $x(x + 1)(x - 3) > 0$;

К-6. Системы уравнений*Подготовительный вариант*

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy = 6, \\ 2x - y = 11; \end{cases}$$

2. Длина диагонали прямоугольника равна 5, а его площадь 12. Найдите стороны прямоугольника.

3. Решите уравнение: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 3) = 4$.

Дополнительные задания

4*. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy = 3, \\ y^2 - xy = 2. \end{cases}$

5*. Решите уравнение: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 3x + \frac{3}{x} = 2$.

ВАРИАНТ 1

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} xy = 8, \\ x + y = 6; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy = 5, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$$

2. Длина диагонали прямоугольника равна 13, а его площадь 60. Найдите стороны прямоугольника.

3. Решите уравнение: $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x - 5) = 6$.

Дополнительные задания

4*. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 8, \\ y^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

5*. Решите уравнение: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} + 6 = 0$.

2 ВАРИАНТ

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 7; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 4x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy = 5, \\ 3x - y = 14; \end{cases}$$

2. Длина диагонали прямоугольника равна 25, а его площадь 168. Найдите стороны прямоугольника.

3. Решите уравнение: $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) = 3$.

Дополнительные задания

4*. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 16, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

5*. Решите уравнение: $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$.

К-7. Арифметическая прогрессия**Подготовительный вариант**

1. В арифметической прогрессии $a_n = 5n + 3$ найдите a_1 , d , a_{13} .
2. В арифметической прогрессии $a_1 = 2$, $d = 7$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите a_{19} .
3. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если $a_2 = 7$, $a_4 = 13$.
4. Найдите x , при котором числа $x - 1$, $2x - 1$, $x^2 - 5$, взятые в данном порядке, составляют арифметическую прогрессию.

Дополнительные задания

- 5*. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 18 - 3n$.
- а) Найдите сумму первых 20 членов.
 - б) При каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наибольшей?
- 6*. Найдите наименьший член последовательности
- $$a_n = n^2 - 42n - 2.$$
- 7*. Найдите арифметическую прогрессию (a_n) , если

$$\begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 58, \\ a_2 + a_4 = 14. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 1

1. В арифметической прогрессии $a_n = 4n - 7$ найдите a_1 , d , a_{18} .
2. В арифметической прогрессии $a_1 = -4$, $d = 9$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите a_{17} .

3. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии, если $a_3 = 8$, $a_5 = 20$.

4. Найдите x , при котором числа $x + 1$, $4x - 1$, $x^2 + 3$, взятые в данном порядке, составляют арифметическую прогрессию.

Дополнительные задания

5*. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 4n - 25$.

а) Найдите сумму первых 10 членов.

б) При каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наименьшей?

6*. Найдите наибольший член последовательности

$$a_n = 3 + 38n - n^2.$$

7*. Найдите арифметическую прогрессию (a_n) , если

$$\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 26, \\ a_3 + a_6 = 10. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

1. В арифметической прогрессии $a_n = 3n + 2$ найдите a_1, d, a_{10} .

2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $d = 5$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите a_{25} .

3. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если $a_6 = 5$, $a_5 = 21$.

4. Найдите x , при котором числа $x + 2$, $3x + 4$, $x^2 + 10$ составляют арифметическую прогрессию.

Дополнительные задания

5*. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 12 - 2n$.

а) Найдите сумму первых 30 членов.

б) При каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наибольшей?

6*. Найдите наименьший член последовательности

$$a_n = n^2 - 34n - 4.$$

7*. Найдите арифметическую прогрессию (a_n) , если

$$\begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 50, \\ a_2 + a_4 = 14. \end{cases}$$

К-8. Геометрическая прогрессия**Подготовительный вариант**

1. Дана геометрическая прогрессия $b_n = 3 \cdot 2^n$. Найдите b_1, q, b_5 .

2. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{27}, q = 3$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите b_7 .

3. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 4, q = -\frac{1}{2}$.

4. Найдите значение t , при котором числа $t - 1, 2t, 4t + 6$, взятые в данном порядке, составляют геометрическую прогрессию.

Дополнительное задание

5*. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе и третье уменьшить на 1, первое оставить без изменений, то полученные числа будут составлять геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Найдите эти числа.

ВАРИАНТ 1

1. Дана геометрическая прогрессия $b_n = 2 \cdot 3^n$. Найдите b_2, q, b_5 .

2. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{32}, q = 2$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите b_9 .

3. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 9, q = -\frac{1}{3}$.

4. Найдите значение t , при котором числа $t - 2$, $3t$, $9t + 30$, взятые в данном порядке, составляют геометрическую прогрессию.

Дополнительное задание

5*. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе из них уменьшить на 2, а остальные два оставить без изменений, то полученные числа будут составлять геометрическую прогрессию со знаменателем 3. Найдите эти числа.

ВАРИАНТ 2

1. Дана геометрическая прогрессия $b_n = 10 \cdot 3^n$. Найдите b_3 , q , b_5 .

2. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{64}$, $q = 4$. Напишите формулу общего члена прогрессии и найдите b_7 .

3. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$.

4. Найдите значение t , при котором числа $t + 1$, $4t$, $16t - 12$, взятые в данном порядке, составляют геометрическую прогрессию.

Дополнительное задание

5*. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе из них увеличить на 1, третье уменьшить на 1, а первое оставить без изменений, то полученные числа будут составлять геометрическую прогрессию со знаменателем 3. Найдите эти числа.

К-9. Итоговая контрольная работа

ВАРИАНТ 1

1. Найдите область определения функции:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}}{3}.$$

2. Пусть b_1 — первый член геометрической прогрессии, q — знаменатель прогрессии.

Известно, что $b_1 = 243$; $q = -\frac{2}{3}$. Найдите шестой член геометрической прогрессии и сумму шести первых членов.

3. Постройте график функции $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ и определите область значения этой функции.

4. Найдите все значения x , при которых выражение $x\sqrt{x^2 + 7x - 18}$ имеет смысл, а также все значения x , при которых значение этого выражения равно нулю.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x+1)(2y-1) = 0, \\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Дополнительное задание

- 6*. При каких значениях b в разложении квадратных трехчленов $2x^2 - x - 1$ и $x^2 + 4x - b$ может быть один и тот же линейный множитель?

ВАРИАНТ 2

1. Найдите область определения функции:

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{(1 - 3x)^2 - 4}}.$$

2. Пусть b_1 — первый член геометрической прогрессии, q — знаменатель прогрессии.

Известно, что $b_1 = -\frac{3}{2}$; $q = 2$. Найдите седьмой член геометрической прогрессии и сумму семи первых членов.

3. Постройте график функции $f(x) = 3x - 0,5x^2$ и определите область значения этой функции.

4. Найдите все значения x , при которых выражение $(2+x)\sqrt{11+10x-x^2}$ имеет смысл, а также все значения x , при которых значение этого выражения равно нулю.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (2x-5)(y+5) = 0, \\ x^2 + xy - 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Дополнительное задание

6*. При каких значениях b в разложении квадратных трехчленов $3x^2 - 2x - 1$ и $x^2 - 4x - b$ может быть один и тот же линейный множитель?

ВАРИАНТ 3

1. Решите уравнение: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

2. Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении переменной: $a^{-\frac{1}{2}} + \frac{a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}}}$ при $a = 3\frac{1}{3}$.

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x+5}{y-3} = 0, \\ 2y^2 + x^2 - y = 40. \end{cases}$$

4. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$ и определите множество значений этой функции на отрезке $[-2; 10]$.

5. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} < \frac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leq 0. \end{cases}$$

Дополнительное задание

6*. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, кратных 3, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 165?

ВАРИАНТ 4

1. Решите уравнение: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

2. Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении переменной: $b^{-\frac{3}{2}} - \frac{b^{-1} - 1}{b^{\frac{1}{2}} - b}$ при $b = 2\frac{6}{7}$.

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{2y-3}{x+2} = 0, \\ x^2 + xy + 4y^2 = 10. \end{cases}$$

4. Постройте график функции $f(x) = -x^2 + 4x$ и определите множество значений этой функции на отрезке $[-2; 10]$.

5. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{7x-2}{3} - \frac{5x+1}{2} < -1, \\ 4x^2 - 7x - 2 > 0. \end{cases}$$

Дополнительное задание

6*. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, кратных 7, начиная с 7, чтобы их сумма была равна 252?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дополнительные задачи по теме «Арифметическая прогрессия»

1. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите синус меньшего из острых углов этого треугольника.

2. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 47 - 3n$.

а) Найдите наибольшую сумму n первых членов арифметической прогрессии.

б) Найдите наименьшую по абсолютной величине сумму n первых членов этой прогрессии.

3. Найдите наименьшую сумму 20 первых членов арифметической прогрессии, все члены которой натуральные числа:

а) не делящиеся на 2;

б) не делящиеся на 5;

в) не являющиеся полными квадратами натуральных чисел.

4. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 1,1 + dn$. Найдите все такие значения $d > 0$, при каждом из которых на отрезке $[1; 17]$ находятся:

а) 10 членов данной прогрессии;

б) ровно 10 членов данной прогрессии.

5. Сколько членов арифметической прогрессии с разностью $d = 0,7$ могут находиться на отрезке $[2; 17]$?

6. Даны две арифметические прогрессии $a_n = 1 + 7n$ и $b_m = -4 + 5m$.

а) Докажите, что число 36 является членом обеих прогрессий.

б) Найдите все числа, которые являются членами обеих прогрессий.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии $a_n = 7n + 5$, делящихся на 11.

8. Пусть a_n и b_n — две арифметические прогрессии. Какие из данных высказываний верны?

а) $c_n = a_n + b_n$ — арифметическая прогрессия;

б) $c_n = a_n \cdot b_n$ — арифметическая прогрессия;

в) $c_n = a_n - b_n$ — арифметическая прогрессия;

г) $c_n = a_n : b_n$ — арифметическая прогрессия;

д) $c_n = 23a_n + 11b_n$ — арифметическая прогрессия.

9. Дана арифметическая прогрессия $a_n = 5n - 4$. Найдите суммы вида:

а) $-a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + \dots + a_{100}^2$;

б)* $\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{39}}}$;

в)* $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{39} \cdot a_{40}}$.

10. Докажите, что:

а) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{401 \cdot 405} < 0,25$;

б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} < 1$.

Упражнения с параметрами

ВАРИАНТ 1

1. При каких значениях a неравенство $x^2 - 5x + a > 0$

- а) справедливо при всех x ;
- б) справедливо при $x > 3$;
- в) справедливо при $x < 7$?

2. Для каждого значения a решите неравенство:

$$x^2 - (2 + a)x + 2a \leq 0.$$

3. При каких значениях b наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - b$ равно 13?

4. При каких значениях a функция

$$y = -3x^2 - ax + 7 \text{ возрастает на промежутке } (-\infty; 7]?$$

5. Для каждого значения a решите систему:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

6. Постройте график функции $y = x^2$ и для каждого a найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[-2; a]$ при $a > -2$.

7. При каких значениях a три корня уравнения

$$(x - a)(x^2 - 5x + 4) = 0 \text{ различны и, взятые в некотором порядке, составляют:}$$

- а) арифметическую прогрессию;
- б) геометрическую прогрессию?

8. Для каждого значения параметра a найдите число различных корней уравнения:

$$a \cdot |x + 1| = 5 + 3x - 2x^2.$$

9. Найдите те же значения параметра a , при которых уравнение $2|x + 1| - 2|x - 2| + |x - 6| = x + a$ имеет ровно один корень.

10. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $|x^2 - 8x - b| = 4x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший чем 11,5.

11. При каких значениях параметра d сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - 2(d - 4)x - 3d^2 - 20d + 7 = 0 \text{ наименьшая?}$$

12. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2 - 5x + 4a} = 2\sqrt{x + a}$.

13. Найдите все такие пары чисел a и b , при которых для любых значений x числа $ax + 3$; $2x - 7$ и $3x + b$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.

14. Для всех значений параметра a решите неравенство $ax^2 - (a + 3)x + 3 \leq 0$.

15. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x - a + 1)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{3a - x}.$$

а) При каких значениях параметра a областью определения функции является отрезок длины 11?

б) При каких значениях параметра a функция определена хотя бы на одном отрезке длины 11?

в) При каких значениях параметра a область определения функции содержит одно действительное число?

ВАРИАНТ 2

1. При каких значениях a неравенство $x^2 + 6x - a \geq 0$

- а) справедливо при всех x ;
- б) справедливо при $x > 3$;
- в) справедливо при $x < 7$?

2. Для каждого значения a решите неравенство:

$$x^2 - (3 - a)x - 3a \geq 0.$$

3. При каких значениях m наибольшее значение функции $y = -x^2 + 6x + m$ равно 17?

4. При каких значениях b функция

$$y = 2x^2 - bx + 3$$

возрастает на промежутке $(3; +\infty)$?

5. Для каждого значения a решите систему:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = a. \end{cases}$$

6. Постройте график функции $y = -x^2$ и для каждого a найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a; 2]$ при $a < 2$.

7. При каких значениях a три корня уравнения

$(x - a)(x^2 - 10x + 9) = 0$ различны и, взятые в некотором порядке, составляют:

- а) арифметическую прогрессию;
- б) геометрическую прогрессию?

8. Для каждого значения параметра b найдите число различных корней уравнения:

$$b \cdot |x - 1| = 3 - x - 2x^2.$$

9. Найдите те же значения параметра a , при которых уравнение $2|x + 3| - 2|x - 2| + |x - 4| = x + a$ имеет ровно два различных корня.

10. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $|x^2 - 4x + b| = x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший чем 4.

11. При каких значениях параметра d сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (d - 1)x - 6d^2 + 7d - 2 = 0 \text{ наименьшая?}$$

12. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 9a} = 3\sqrt{a - x}$.

13. Найдите все такие пары чисел a и b , при которых для любых значений x числа $5x - 4$; $ax + 7$ и $2x + b + 2$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.

14. Для всех значений параметра a решите неравенство $ax^2 - (a - 5)x - 5 \geq 0$.

15. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (a - x + 3)^{0.3} + \sqrt{x - 3a}.$$

а) При каких значениях параметра a областью определения функции является отрезок длины 7?

б) При каких значениях параметра a функция определена хотя бы на одном отрезке длины 7?

в) При каких значениях параметра a область определения функции содержит одно действительное число?

ОТВЕТЫ

Ответы к контрольным работам

К-1

Подготовительный вариант

1. а) -3 ; 8; б) $-\frac{7}{3}$; 2.

2. а) $x(2x+3)$; б) $2(2x-1)(2x+1)$; в) $(x-8)(x+3)$;

г) $(x-2)(3x+7)$; д) $3(x-2)(3x+7)$; е) $(1-x)(x+4)$.

3. $\frac{2x+3}{x-1}$.

4. а) 1; б) -2 .

5. а) 5; б) 9.

6*. $b \leq 4$.

1 ВАРИАНТ

1. а) -3 ; 7; б) -2 ; 2, 25.

2. а) $x(3x-5)$; б) $3(3x-1)(3x+1)$; в) $(x-7)(x+3)$;

г) $(x+2)(4x-9)$; д) $7(x-2)(2x+3)$; е) $(1-x)(x+5)$.

3. $\frac{3x-5}{x+1}$.

4. а) -3 ; б) -2 .

5. а) 4; б) 16.

6*. $b \leq 9$.

2 ВАРИАНТ

1. а) -2 ; 5; б) -2 , 5; 3.

2. а) $x(4x + 1)$; б) $3(2x - 1)(2x + 1)$; в) $(x - 5)(x + 2)$;
г) $(2x + 5)(x - 3)$; д) $4(x - 1)(2x + 3)$; е) $(1 - x)(x + 6)$.

3. $\frac{2x + 5}{x - 3}$.

4. а) -5 ; б) $-3,25$.

5. а) -3 ; б) 1.

6*. $b \leq 1$.

К-2

Подготовительный вариант

1. а) -2 ; 8; б) нулей нет.

2. а) $(5; 0)$; $(-1; 0)$; б) $(0; -5)$; в) $(0; -5)$; $(6; 7)$; г) -9 .

3. Возрастает на $(-\infty; 0]$; убывает на $[0; +\infty)$.

5*. а) $k < -1$; б) $k = -1$; в) $k > -1$; г) таких k нет.

1 ВАРИАНТ

1. а) -3 ; 9; б) нулей нет.

2. а) $(4; 0)$; $(-1; 0)$; б) $(0; 4)$; в) $(0; 4)$; г) $6,25$.

3. Возрастает на $(-\infty; 0]$; убывает на $[0; +\infty)$.

5*. а) $k > 4$; б) $k = 4$; в) $k < 4$; г) таких k нет.

2 ВАРИАНТ

1. а) -2 ; 9; б) 2; 3.

2. а) $(-6; 0)$; (1; 0); б) $(0; 6)$; в) $(0; 6)$; $(-10; -44)$; г) $12\frac{1}{4}$.

3. Возрастает на $(-\infty; 0]$; убывает на $[0; +\infty)$.

5*. а) $k < -2$; б) $k = -2$; в) $k > -2$; г) таких k нет.

К-3

Подготовительный вариант

1. а) 10; б) $\frac{9}{4}$; в) -1 ; г) 2,5; д) 2; е) 18.

2. $\frac{1}{8}$.

3. $[0; 2)$.

4*. $(1; +\infty)$.

1 ВАРИАНТ

1. а) 13; б) $2\frac{1}{21}$; в) -2 ; г) $\frac{4}{3}$; д) 3; е) 20.

2. $\frac{1}{4}$.

3. $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

4*. $(1; +\infty)$.

2 ВАРИАНТ

1. а) 11; б) $1\frac{19}{28}$; в) -4; г) $1\frac{1}{5}$; д) 5; е) 29.

2. $\frac{1}{16}$.

3. $[-3; 1)$.

4*. $(1; +\infty)$.

К-4

Подготовительный вариант

1. а) $(-1; 5)$; б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; г) нет решений; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}; +\infty\right)$.

2. а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; в) $(0; 2)$; г) $[0; 2]$; д) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) нет решений; з) $\{1\}$.

3. а) $(-1; 5)$; б) $(0; 5)$; в) нет решений; г) $\{5\}$.

4*. $[-10; -1) \cup (3; 10]$.

5*. $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$.

1 ВАРИАНТ

1. а) $(-1; 4)$; б) $[-3; 3]$; в) $(-\infty; 0) \cup (1, 5; +\infty)$; г) нет решений; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}; +\infty\right)$.

2. а) $(0; 4)$; б) $[0; 4]$; в) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$;
г) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; д) нет решений; е) $\{2\}$;
ж) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$.

3. а) $(-1; 4)$; б) $(0; 4)$; в) нет решений; г) $\{4\}$.

4*. $[-9; -4) \cup (1; 9]$.

5*. $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

2 ВАРИАНТ

1. а) $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$; б) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; в) $\left(0; \frac{1}{4}\right)$;
г) нет решений; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right]$.

2. а) $(0; 6)$; б) $[0; 6]$; в) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$;
г) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$; д) нет решений;
е) $\{3\}$; ж) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$.

3. а) $(-1; 6)$; б) $(0; 6)$; в) нет решений; г) $\{6\}$.

4*. $[-11; -2) \cup (5; 11]$.

5*. $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

К-5

Подготовительный вариант

1. а) $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$; б) $(-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$.

2. а) $(1; +\infty)$; б) $[1; +\infty) \cup \{0\}$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$;

г) $(-\infty; 1]$.

3. а) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (5; +\infty)$;

в) $(-1; 0) \cup (0; 5)$; г) $[-1; 5)$.

4. $[-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

5*. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;

6*. $[-2; -0,2] \cup [0; +\infty)$;

7*. При $a > 1$ $x \in (1; a]$,

при $a = 1$ нет решений, при $a < 1$ $x \in [a; 1)$.

1 ВАРИАНТ

1. а) $(-3; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(-3; 2]$.

2. а) $(0; +\infty)$; б) $[0; +\infty) \cup \{-2\}$; в) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0)$;

г) $(-\infty; 0]$.

3. а) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup (4; +\infty)$;

в) $(-3; 0) \cup (0; 4)$; г) $[-3; 4)$.

4. $[-3; 0) \cup [3; +\infty)$.

$$5*. (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$6*. (-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{7}; 1\frac{1}{2}\right].$$

7*. При $a > 2$ $x \in (-\infty; -a] \cup (-2; +\infty)$, при $a = 2$
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, при $a < 2$ $x \in (-\infty; -2) \cup [-a; +\infty)$.

2 В А Р И А Н Т

$$1. а) (-1; 0) \cup (3; +\infty); б) (-1; 4].$$

$$2. а) (0; 3) \cup (3; +\infty); б) [0; +\infty); в) (-\infty; 0);$$

$$г) (-\infty; 0] \cup \{3\}.$$

$$3. а) (-\infty; -5) \cup (2; +\infty); б) (-\infty; -5] \cup \{0\} \cup (2; +\infty);$$

$$в) (-5; 0) \cup (0; 2); г) [-5; 2).$$

$$4. [-5; 1) \cup [5; +\infty).$$

$$5*. (-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty).$$

$$6*. \left[-\frac{2}{3}; 0\right] \cup [0,5; +\infty).$$

7*. При $a > -3$ $x \in (-\infty; -a] \cup (3; +\infty)$, при $a = -3$
 $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, при $a < -3$ $x \in (-\infty; 3) \cup [-a; +\infty)$.

К-6

Подготовительный вариант

1. а) (3; 2); (2; 3); б) (-0,5; -12); (6; 1); в) (1; 1); (1,4; -0,2).

2. 3; 4.

3. -4; 1; $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

4*. $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (1; 2); (-1; -2).

5*. $-2-\sqrt{3}$; $-2+\sqrt{3}$.

1 ВАРИАНТ

1. а) (2; 4); (4; 2); б) (5; 1); (-2; -2,5); в) (1; 2); (2,2; -0,4).

2. 5; 12.

3. -6; 1; $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.

4*. $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$; $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$; (2; 1); (-2; -1).

5*. $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$.

2 ВАРИАНТ

1. а) (3; 4); (4; 3); б) (5; 1); $\left(-\frac{1}{3}; -15\right)$;

в) $\left(2\frac{12}{17}; -\frac{14}{17}\right)$; (2; 2).

2. 24; 7.

3. -3; -1; 1.

4*. $\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); (2; 3); (-2; -3).$

5*. $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1.$

К-7

Подготовительный вариант

1. $a_1 = 8; d = 5; a_{18} = 68.$

2. $a_n = 7n - 5; a_{19} = 128.$

3. $S_{20} = 650.$

4. $x = -1$ или $x = 4.$

5*. а) $S_{20} = -270$; б) $n = 5$ или $n = 6.$

6*. $a_{21} = -443.$

7*. $a_n = 2n + 1$ или $a_n = 5n - 8.$

1 ВАРИАНТ

1. $a_1 = -3; d = 4; a_{18} = 65.$

2. $a_n = 9n - 13; a_{17} = 140.$

3. $S_{30} = 2490.$

4. $x = 1$ или $x = 6.$

5*. а) $S_{10} = -30$; б) $n = 6.$

$$6^*. a_{19} = 364.$$

$$7^*. a_n = 2n - 3 \text{ или } a_n = 3n - 7.$$

2 ВАРИАНТ

$$1. a_1 = 5; d = 3; a_{10} = 32.$$

$$2. a_n = 5n - 7; a_{25} = 118.$$

$$3. S_{10} = 130.$$

$$4. x = 1 \text{ или } x = 4.$$

$$5^*. \text{ а) } S_{30} = -570; \text{ б) } n = 6 \text{ или } n = 5.$$

$$6^*. a_{17} = -293.$$

$$7^*. a_n = 3n - 2 \text{ или } a_n = 4n - 5.$$

К-8

Подготовительный вариант

$$1. b_1 = 6; q = 2; b_5 = 96.$$

$$2. b_n = \frac{1}{27} \cdot 3^{n-1}; b_7 = 27.$$

$$3. S_6 = -5, 25.$$

$$4. 3.$$

$$5^*. 1, 3, 5.$$

1 ВАРИАНТ

$$1. b_2 = 18; q = 3; b_6 = 486.$$

$$2. b_n = \frac{1}{32} \cdot 2^{n-1}; b_9 = 8.$$

$$3. S_6 = -20\frac{2}{9}.$$

$$4. 5.$$

$$5*. 1, 5, 9.$$

2 ВАРИАНТ

$$1. b_3 = 270; q = 3; b_5 = 2430.$$

$$2. b_n = 4^{n-4}; b_7 = 64.$$

$$3. S_5 = -20\frac{21}{25}.$$

$$4. 3.$$

$$5*. -\frac{3}{4}; -3\frac{1}{4}; -5\frac{3}{4}.$$

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1 ВАРИАНТ

1. $[-2; -1]$.

2. $b_6 = -32; S_6 = 133$.

3. $[-3; +\infty)$.

4. Определено при $x \in (-\infty; -9] \cup [2; +\infty)$; равно нулю при $x = -9$ или $x = 2, x = 0$.

5. $(-1; -1)$.

6*. $-1\frac{3}{4}; 5$.

2 ВАРИАНТ

1. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

2. $b_7 = -96; S_7 = -190,5$.

3. $(-\infty; 4,5]$.

4. Определено при $x \in [-1; 11]$; равно нулю при $x = -2$ или $x = -1$ или $x = 11$.

5. $(2,5; -0,5); (2,5; 1,125); (13; -5); (8; -5)$.

6*. $-3; 1\frac{4}{9}$.

3 ВАРИАНТ

1. $-2; 2$.

2. $\frac{1}{a}; 0,3$.

3. $(-5; -2,5)$.

4. $[-4; 77]$.

5. $\left[-3; -\frac{2}{3}\right)$.

6*. 10.

4 ВАРИАНТ

1. $-3; 3$.

2. $-\frac{1}{b}; -0,35$.

3. $(0,5; 1,5)$.

4. $[-60; 4]$.

5. $\left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.

6*. 8.

Справочное издание

**Звавич Леонид Исаакович
Дьяконова Наталия Васильевна
Дидактические материалы
по алгебре
9 класс**

к учебнику Ю. Н. Макарычева и др.
«Алгебра. 9 класс»

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лапто*
Редактор *Г. А. Лонцова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректор *В. В. Кожуткина, Е. В. Григорьева*
Дизайн обложки *А. Ю. Беляева*
Компьютерная вёрстка *О. Н. Савина*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь,
www.pareto-print.ru

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Книги издательства **ЭКЗАМЕН** можно приобрести
оптом и в розницу в следующих книготорговых организациях:

Москва

ИП Степанов — Тел. 8-926-132-22-35
Луна — Тел. 8-916-145-70-06; (495) 688-59-16
ТД Библио-Глобус — Тел. (495) 781-19-00
Молодая гвардия — Тел. (499) 238-00-32
Дом книги Медведково — Тел. (499) 476-16-90
Дом книги на Ладужской — Тел. (499) 400-41-06
Шаг к лятке — Тел. (495) 728-33-09; 346-00-10
Сеть магазинов Мир школьников

Санкт-Петербург

Коллибри — Тел. (812) 703-59-96
Буквод — Тел. (812) 346-53-27
Век Развития — Тел. (812) 924-04-58
Тандем — Тел. (812) 702-72-94
Виктория — Тел. (812) 292-36-59/60/61
Санкт-Петербургский дом книги — Тел. (812) 448-23-57

Архангельск

АВФ-книга — Тел. (8182) 65-41-34

Барнаул

Вектор — Тел. (3852) 38-18-72

Благовещенск

Калугин — Тел. (4162) 35-25-43

Брянск

Буква — Тел. (4832) 61-38-48

ИП Трубка — Тел. (4832) 59-59-39

Волгоград

Кассандра — Тел. (8442) 97-55-55

Владивосток

Приморский торговый дом книги — Тел. (4232) 63-73-18

Воронеж

Амитель — Тел. (4732) 26-77-77

Рюкса — Тел. (4732) 21-08-66

Екатеринбург

ТЦ Люмна — Тел. (343) 344-40-60

Дом книги — Тел. (343) 253-50-10

Алис — Тел. (343) 255-10-06

Буквариус — Тел. 8-800-700-54-31; (499) 272-69-46

Ессентуки

ЧП Зинченко — Тел. (87961) 5-11-28

Иркутск

Продалитъ — Тел. (3952) 24-17-77

Казань

Аист-Пресс — Тел. (8435) 25-55-40

Такс — Тел. (8432) 72-34-55

Киров

ИП Шаповалов «УЛИСС» — Тел. (8332) 57-12-15

Краснодар

Когорта — Тел. (8612) 62-54-97

ОИПЦ Перспективы образования — Тел. (8612) 54-25-67

Красноярск

Градъ — Тел. (3912) 26-91-45

Планета-Н — Тел. (391) 215-17-01

Кострома

Леонардо — Тел. (4942) 31-53-76

Курск

Оптимист — Тел. (4712) 35-16-51

Мурманск

Тезей — Тел. (8152) 43-63-75

Нижний Новгород

Учебная книга — Тел. (8312) 40-32-13

Пароль — Тел. (8312) 43-02-12

Дирижабль — Тел. (8312) 34-03-05

Нижневартовск

Учебная книга — Тел. (3466) 40-71-23

Новокузнецк

Книжный магазин Планета — Тел. (3843) 70-35-83

Новосибирск

Сибверк — Тел. (383) 2000-155

Библионик — Тел. (3833) 36-46-01

Планета-Н — Тел. (383) 375-00-75

Омск

Форсаж — Тел. (3812) 53-89-67

Оренбург

Фолмант — Тел. (3532) 77-25-52

Пенза

Лексикон — Тел. (8412) 68-03-79

Учколлектор — Тел. (8412) 95-54-59

Пермь

Азбука — Тел. (3422) 41-11-35

Тигр — Тел. (3422) 45-24-37

Петропавловск-Камчатский

Новая книга — Тел. (4152) 11-12-60

Пятигорск

ИП Лобанова — Тел. (8793) 98-79-87

Твоя книга — Тел. (8793) 39-02-53

Ростов-на-Дону

Фалтон-пресс — Тел. (8632) 40-74-88

ИП Ермаков — Тел. 8-961-321-97-97

Магистр — Тел. (8632) 99-98-96

Рязань

ТД Просвещение — Тел. (4912) 44-67-75

ТД Барс — Тел. (4912) 93-29-54

Самара

Чакана — Тел. (846) 231-22-33

Метид — Тел. (846) 269-17-17

Саратов

Гемера — Тел. (8452) 64-37-37

Умная книга — Тел. (8452) 27-37-10

Полиграфист — Тел. (8452) 29-67-20

Стрелец и К — Тел. (8452) 52-25-24

Смоленск

Кругозор — Тел. (4812) 65-86-65

Сургут

Родник — Тел. (3462) 22-05-02

Тверь

Книжная лавка — Тел. (4822) 33-93-03

Тула

Система Плюс — Тел. (4872) 70-00-66

Тюмень

Знание — Тел. (3452) 25-23-72

Уссурийск

Сталкер — Тел. (4234) 32-50-19

Ульян-Удэ

Полином — Тел. (3012) 55-15-23

Уфа

Эдвис — Тел. (3472) 82-89-65

Хабаровск

Мирс — Тел. (4212) 47-00-47

Челябинск

Интерсервис ЛТД — Тел. (3512) 47-74-13

Южно-Сахалинск

Весть — Тел. (4242) 43-62-67

Якутск

Книжный маркет — Тел. (4112) 49-12-69

Якутский книжный дом — Тел. (4112) 34-10-12

По вопросам прямых оптовых закупок обращайтесь
по тел. (495) 641-00-30 (многоканальный), sale@examen.biz
www.examen.biz